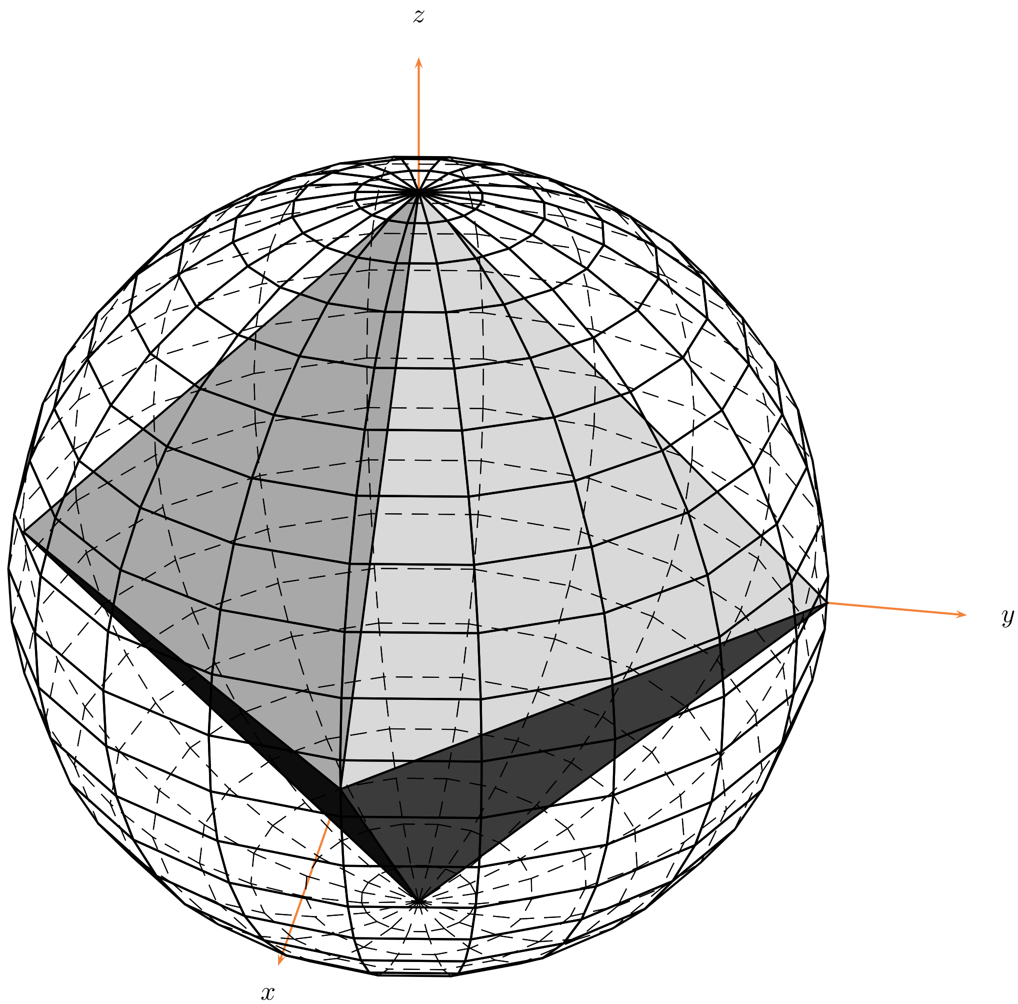
Funciones de varias variables



Farith Briceño - 2013

Funciones de varias variables

Objetivos a cubrir **Código : MAT-CV.1**

- Funciones de varias variables: Dominio.
- Geometría de las funciones de varias variables.

Ejercicios

1. Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=x^2+y^2-3$. Hallar

   1. $f(0,0)$ 2. $f(-1,k)$ 3. $2-f(3,1)$ 4. $f(x+h,y)$ 5. $f(x,y+k)$

   6. $\dfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$ 7. $\dfrac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$ 8. $\dfrac{f((x,y)+t(a,b))-f(x,y)}{t}$

2. Sea $g:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x,y)=\ln(xy+y-1)$. Hallar

   1. $g(1,1)$ 2. $g(e,1)$ 3. $g(x,1)$ 4. $g(x+h,y)$ 5. $g(x,y+k)$

   6. $\dfrac{g(x+h,y)-g(x,y)}{h}$ 7. $\dfrac{g(x,y+k)-g(x,y)}{k}$ 8. $\dfrac{g((x,y)+t(a,b))-g(x,y)}{t}$

3. Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=\dfrac{3xy}{x^2+2y^2}$. Hallar

   1. $f(1,1)$ 2. $f(-1,2)$ 3. $2f(t,1)$ 4. $f(x+h,y)$ 5. $f(x,y+k)$

   6. $\dfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$ 7. $\dfrac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$ 8. $\dfrac{f((x,y)+t(a,b))-f(x,y)}{t}$

4. Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=x^2+y^2+4xy-7x+10$. Hallar

   1. $f(2,1)$ 2. $f(-3,5)$ 3. $f(x+h,y)$ 4. $f(x,y+k)$ 5. $f(x,x)$

   6. $\dfrac{d}{dx}(f(x,x))$ 7. $\dfrac{d}{dy}(f(1,y))$ 8. $\dfrac{d}{dx}\left(f\left(-1,x^2\right)\right)(2)$ 9. $\dfrac{d}{dx}\left(f\left(x,x^2\right)\right)(0)$

   10. $\dfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$ 11. $\dfrac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$ 12. $\dfrac{f((x,y)+t(a,b))-f(x,y)}{t}$

5. Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=\sqrt{xy}+\ln(x)$. Hallar

   1. $f(1,0)$ 2. $f(1,2k)$ 3. $2f(2,2)$ 4. $f(x+h,y)$ 5. $f(x,y+k)$

   6. $\dfrac{d}{dx}(f(x,x))$ 7. $\dfrac{d}{dy}(f(-y,y))$ 8. $\dfrac{d}{dx}(f(-1,x))(e)$ 9. $\dfrac{d}{dx}(f(x,-1))(1)$

   10. $\dfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$ 11. $\dfrac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$ 12. $\dfrac{f((x,y)+t(a,b))-f(x,y)}{t}$

6. Sea $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z)=x^2-2y^2+\dfrac{3}{z}$. Hallar

   1. $f(0,0,3)$ 2. $f\left(-1,k,-\sqrt{3}\right)$ 3. $\dfrac{3}{2}f(-1,3,1)$ 4. $f(x+h,y,z)$ 5. $f(x,y+k,z)$

   6. $f(x,y,z+w)$ 7. $\dfrac{f(x+h,y,z)-f(x,y,z)}{h}$ 8. $\dfrac{f(x,y+k,z)-f(x,y,z)}{k}$

   9. $\dfrac{f(x,y,z+w)-f(x,y,z)}{w}$ 10. $\dfrac{f((x,y,z)+t(a,b,c))-f(x,y,z)}{t}$

7. Sea $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z)=x^2ye^{2z}+(x-y+3z)^2$. Hallar

   1. $f(0,0,0)$ 2. $f((-1,-1,0)$ 3. $\frac{3}{2}f(-1,3,1)$ 4. $f(x+h,y,z)$ 5. $f(x,y+k,z)$

   6. $\frac{d}{dx}(f(x,x,x))$ 7. $\frac{d}{dy}(f(1,y,1))$ 8. $\frac{d}{dz}\left(f\left(1,-1,z^2\right)\right)$ 9. $\frac{d}{dx}\left(f\left(x,x^2,-1\right)\right)(0)$

   10. $f(x,y,z+w)$ 11. $\frac{f(x+h,y,z)-f(x,y,z)}{h}$ 12. $\frac{f(x,y+k,z)-f(x,y,z)}{k}$

   13. $\frac{f(x,y,z+w)-f(x,y,z)}{w}$ 14. $\frac{f((x,y,z)+t(a,b,c))-f(x,y,z)}{t}$

8. Sea $G:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $G(x,y,z)=x\operatorname{sen} y\cos z$. Hallar

   1. $G\left(2,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ 2. $G\left(4,\frac{\pi}{4},0\right)$ 3. $G(t,t,t)$ 4. $G(u,v,0)$ 5. $G(x,-x+y,x)$

   6. $\frac{d}{dt}(G(t,t,t))$ 7. $\frac{d}{dy}(G(1,y,1))$ 8. $\frac{d}{dz}\left(G\left(1,-\frac{\pi}{2},z^2\right)\right)$ 9. $\frac{d}{dx}\left(G\left(x,x^2,-\pi\right)\right)(\pi)$

   10. $G(x,y,z+w)$ 11. $\frac{G(x+h,y,z)-G(x,y,z)}{h}$ 12. $\frac{G(x,y+k,z)-G(x,y,z)}{k}$

   13. $\frac{G(x,y,z+w)-G(x,y,z)}{w}$ 14. $\frac{G((x,y,z)+t(a,b,c))-G(x,y,z)}{t}$

9. La función $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es tal que $f(x+y,x-y)=x^2+y^2$. Determine $f(2,5)$, $f(x,3)$, $f(5,y)$, $f(x,y)$. ¿A dónde manda f los puntos de la recta $y=x$?. ¿A dónde manda f los puntos de la recta $y=-x$?.

10. La función $f:U\subset\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, es tal que $f\left(x-y,\frac{y}{x}\right)=y^2-x^2$. Determine $f(x,y)$. ¿Cuál es el dominio U de esta función?

11. Considere la función $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x,y)=\operatorname{sgn}\left(x-y^2\right)$, donde la función sgn (función signo) está dada por

$$\operatorname{sgn}(\alpha)=\begin{cases} 1 & \text{si } \alpha>0 \\ 0 & \text{si } \alpha=0 \\ -1 & \text{si } \alpha<0 \end{cases}$$

   Describa el conjunto de puntos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tales que

   a. $f(x,y)>0$; *b.* $f(x,y)=0$; *c.* $f(x,y)<0$;

12. Considere la función $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x,y)=\ln\left(\operatorname{sgn}\left(1+x^2+y^2\right)\right)$, ¿Cuál es el dominio de f?, ¿cuál es su rango?.

13. Repita el ejercicio 12 para la función $f(x,y)=\operatorname{sgn}(\ln(1+x+y))$.

14. Hallar y graficar el dominio de las siguientes funciones

   1. $f(x,y)=\sqrt{x+y}$ 2. $f(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 3. $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x+y}}$ 4. $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

   5. $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}$ 6. $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{-y}}$ 7. $f(x,y)=\sqrt{xy}$ 8. $f(x,y)=\sqrt{x}\sqrt{y}$

   9. $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{xy}}$ 10. $f(x,y)=\sqrt{\frac{y}{x}}$ 12. $f(x,y)=\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ 13. $f(x,y)=\sqrt{x+\sqrt{y}}$

14. $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x(4-y^2)}}$ 15. $f(x,y)=\sqrt[4]{y-2x}$ 16. $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{3-x^2}}-y^2$

17. $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x(4-y^2)}}$ 18. $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 19. $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

20. $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{-xy}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ 21. $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{9-x^2-y^2}}{x+2y}$ 22. $f(x,y)=\sqrt{4x^2+9y^2-36}$

23. $f(x,y)=\dfrac{e^{x+y}}{\sqrt{4x^2+9y^2-36}}$ 24. $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x}-3\sqrt{y-1}}{\sqrt{4x^2+9y^2-36}}$ 25. $f(x,y)=xy\sqrt{x^2+y}$

26. $f(x,y)=\sqrt{36-4x^2-9y^2}$ 27. $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-5y^4}$ 28. $f(x,y)=\dfrac{e^{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\sqrt{1-x^2-5y^4}}$

29. $f(x,y)=\sqrt{4-2x^2-y^2}$ 30. $f(x,y)=\dfrac{e^{\sqrt{x}-\sqrt{-y}}}{\sqrt{4-2x^2-y^2}}$ 31. $f(x,y)=\ln(xy)$

32. $f(x,y)=\ln x+\ln y$ 33. $f(x,y)=\ln(-xy)$ 34. $f(x,y)=\ln(-x)+\ln y$

35. $f(x,y)=\ln|xy|$ 36. $f(x,y)=\ln(\operatorname{sen} x)-\ln y$ 37. $f(x,y)=\ln\left(x+y^2\right)-x$

38. $f(x,y)=\ln\left(x+\sqrt{y}\right)$ 39. $f(x,y)=\ln(xy-1)$ 40. $f(x,y)=\ln\left(x^2-y^2\right)$

41. $f(x,y)=\dfrac{x}{\ln(x-2)}$ 42. $f(x,y)=\ln\left(\dfrac{y}{x+y}\right)$ 43. $f(x,y)=\ln y-\ln(x+y)$

44. $f(x,y)=\ln x-\ln(x-e^y)$ 45. $f(x,y)=\ln\left(\dfrac{x}{x-e^y}\right)$ 46. $f(x,y)=\ln y-\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{y}\right)$

47. $f(x,y)=x\ln\left(1-y^2\right)$ 48. $f(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)$ 49. $f(x,y)=\ln\left(36-4x^2-9y^2\right)$

50. $f(x,y)=\ln\left(16-4x^2-4y^2\right)$ 51. $f(x,y)=\dfrac{\ln(-xy)}{\ln(-x)+\ln y}$ 52. $f(x,y)=\sqrt{\ln(1+x+y)}$

53. $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{\ln(1+2x^2+4y^2)}}$ 54. $f(x,y)=\arccos(y-x)$ 55. $f(x,y)=\sqrt{y\cos x}$

56. $f(x,y)=\ln(y\ln(1+x+y))$ 57. $f(x,y)=\arccos\sqrt{x+y}$ 58. $f(x,y)=\arctan\left(\dfrac{1+x^2}{1+y^2}\right)$

59. $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{y\cos x}}{\sqrt{\ln(1+2x^2+4y^2)}}$ 60. $f(x,y)=\operatorname{arcsen}\left(x^2+y\right)$ 61. $f(x,y)=\dfrac{\operatorname{arcsen}(xy)}{\sqrt[4]{x^4-y^4}}$

62. $f(x,y)=\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1}{x^2-y}\right)$ 63. $f(x,y)=\sqrt{\operatorname{sen}\left[\pi\left(x^2+y^2\right)\right]}$ 64. $f(x,y)=\sqrt{y}\ln(y+x)$

65. $f(x,y)=\sqrt{y-x}\ln(y+x)$ 66. $f(x,y)=\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{4-x^2-y^2}-2\right)$

67. $f(x,y)=3^{x+\cos y}-\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{2+x}\right)$ 68. $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{y}\ln(y+x)+e^{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\operatorname{arcsen}(xy)}+\ln(xy)$

69. $f(x,y)=\ln(y\ln(1+x+y))-\sqrt{\ln(1+x+y)}+\sqrt{x+\sqrt{y}}$

70. $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{y\cos x}}{\sqrt{\ln(1+2x^2+4y^2)}}+\dfrac{\operatorname{arcsen}(xy)}{\sqrt[4]{x^4-y^4}}-\arccos\sqrt{x+y}+5^{\sqrt{y-x}\ln(y+x)}$

15. Halle el dominio de la función dada

1. $f(x,y,z)=\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}$ 2. $f(x,y,z)=\sqrt{5-x^2-y^2-z^2}$

3. $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{5 - x^2 - y^2 - z^2}}$ 4. $f(x,y,z) = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$

5. $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1 + 2x_2^2 + 3x_3^3 + 4x_4^4$ 6. $f(x,y,z) = \sqrt{x+y+z} + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$

7. $f(x,y,z) = \ln\left(x^4 \ln^2\left(y^2 \ln z\right)\right)$ 8. $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x-y-z} - \sqrt{xyz}$

9. $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1 + 2x_3^2 - \sqrt{x_4}$ 10. $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \ln(x_1x_3) - \ln(x_4)$

11. $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \dfrac{1}{\sqrt{x_1+x_2+x_3+x_4}} + \sqrt{x_1+x_2+x_3+x_4}$

12. $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \dfrac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1+x_2+x_3+x_4}} + \dfrac{\sqrt{x_1+x_2+x_3+x_4}}{\operatorname{sen} x_1}$

16. Describa las curvas de nivel de la función $f(x,y) = ax + by + c$, donde $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$.

17. Dé un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

 1. cuyo nivel 1 es $\{x = 1\}$ 2. cuyo nivel 1 es $\{x = 1, x = 3\}$ 3. cuyo nivel 1 es $\{1 \leq x \leq 3\}$
 4. cuyo nivel 1 es $\{x \ / \ x \in \mathbb{Z}\}$ 5. cuyo nivel 1 es $\mathbb{R}$

18. Dé un ejemplo de una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

 (a) cuyo nivel 1 sea la curva $y = \operatorname{sen} x$.
 (b) cuyo nivel -7 sea la curva $y = \sqrt{x^6 + \ln^8 x}$.
 (c) cuyo nivel 126 sea la curva $y^4x + x^3y - 5 = 0$.
 (d) cuyo nivel 0 sea el conjunto de puntos del interior del círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$ (sin incluir la frontera)

19. Sea $\phi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de una variable real, con rango $J \subset \mathbb{R}$. Dé un ejemplo de una función $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ cuyo nivel c sea la gráfica de la función ϕ. ¿Dónde se define la función f?.

20. Sea $f(x,y) = \left(y - x^2 + 1\right)\left(y + x^2 - 1\right)$. Demuestre que el nivel cero de esta función está formado por las curvas $y = x^2 - 1$ y $y = 1 - x^2$, las cuales se cortan en $(1,0)$ y en $(-1,0)$.

21. Describa las superficies de nivel de la función lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x,y,z) = ax + by + cz + d$, donde $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$.

22. Dé una función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

 (a) cuyo nivel 1 sea la superficie $z = x^2 + y^2$.
 (b) cuyo nivel -7 sea la superficie $z = \ln^2\left(\operatorname{sen}^4\left(x + y^8\right) + 7\right)$.
 (c) cuyo nivel 126 sea la superficie $xz^3 + x^2y^5z^2 - 23yz + 128 = 0$.
 (d) cuyo nivel 0 sea el conjunto de puntos del interior de la esfera unitario $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (sin incluir la frontera)

23. Describa algunas curvas de nivel de las funciones dadas. Haga una representación gráfica de algunas de estas curvas

 1. $f(x,y) = x^2 - y$ 2. $f(x,y) = |x| - y$ 3. $f(x,y) = \sqrt{xy}$ 4. $f(x,y) = x - |y|$

 5. $f(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$ 6. $f(x,y) = |x - y|$ 7. $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ 8. $f(x,y) = \operatorname{arcsen}(x + y)$

 9. $f(x,y) = |x - y|$ 10. $f(x,y) = \dfrac{2y}{x^2+y^2}$ 11. $f(x,y) = (\operatorname{sgn} x)\, y$

24. Identifique y bosqueje la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones en el espacio tridimensional

1. $4x^2 + 26y^2 = 144$ 2. $y^2 + z^2 = 15$ 3. $z^2 = 3y$ 4. $y = \cos x$ 5. $3x - 2y = 2$

6. $z = \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16}$ 7. $x^2 + y^2 - 4z^2 + 4 = 0$ 8. $9x^2 + 25y^2 + 9z^2 = 225$

9. $x^2 - z^2 + y = 0$ 10. $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ 11. $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 13 = 0$

12. $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ 13. $x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$ 14. $9x^2 - y^2 + 9z^2 - 9 = 0$

15. $5x + 8y - 3z = 10$ 16. $\dfrac{x^2}{9} - y^2 - z^2 = 1$ 17. $z + x^2 + y^2 - 5 = 0$

18. $x^2 + y^2 + z^2 + 6z = 0$ 19. $x - z^2 - y^2 - 3 = 0$ 20. $3x^2 - y^2 + 5z^2 = 0$

25. Hallar la curva de intersección entre las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = 3$.

26. Hallar la curva de intersección entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ y $x^2 + y^2 + (z - r)^2 = r^2$.

27. Hallar la curva de intersección entre las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x + y + z = 0$.

28. Hallar la curva de intersección entre las superficies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

29. Hallar la curva de intersección entre los planos $2x - 3y + 5z = 2$ y $x + y + z = 4$.

30. Hallar la curva de intersección entre la esfera unitaria y el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

Bibliografía

1. **Marsden, Jerrold E., y Tromba, Anthony J.**: "*Cálculo vectorial*". Quinta edición. Addison-Wesley.
2. **Apostol, Tom**: "*Calculus*". Volumen II. Segunda Edición. Editorial Reverte
3. **Pita Ruiz, Claudio**: "*Cálculo vectorial*". Primera edición. Prentice Hall Hispanoamericana.
4. **Morales Bueno, Jacinto**: "*Problemario: Ejercicios de Cálculo Diferencial y del Cálculo Integral en Varias Variables Reales*". Tercera Edición. U.S.B.
5. **Bradley, Gerald L., y Smith, Karl J.**: "*Cálculo de varias variables*". Volumen 2. Prentice Hall.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Límite de funciones de varias variables

Objetivos a cubrir **Código : MAT-CV.2**

- Conjunto abierto. Conjunto cerrado. Puntos fronteras.
- Límite de funciones de varias variables. Aproximación por trayectorias. Definición formal.
- Continuidad de funciones de varias variables en un punto.

Ejercicios

1. Demostrar que la bola abierta de centro $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y radio r es un conjunto abierto.
2. Demuestre que que el semiplano inferior es un conjunto abierto, es decir,
$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y < 0\right\}$$
es un conjunto abierto
3. Demuestre que el conjunto $S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x > 0\right\}$ es un conjunto abierto.
4. Demuestre que el conjunto $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = 0\right\}$ no es un conjunto abierto.
5. Demostrar que el espacio $\mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto.
6. Demostrar que el conjunto $A = \{x_0\}$, donde $x_0 \in \mathbb{R}^n$ no es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.
7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x, y) = 4y + 2$. Se sabe que
$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} f(x, y) = 14.$$
Dado $\varepsilon = 0.1$, halle $\delta_{(\varepsilon)} > 0$, tal que
$$\|(x, y) - (1, 3)\| > \delta \qquad \text{si} \qquad |f(x, y) - 14| < \varepsilon$$
8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x, y) = 3 - 2x$. Se sabe que
$$\lim_{(x,y)\to(-1,4)} f(x, y) = 5.$$
Dado $\varepsilon = 0.01$, halle $\delta_{(\varepsilon)} > 0$, tal que
$$\|(x, y) - (-1, 4)\| > \delta \qquad \text{si} \qquad |f(x, y) - 5| < \varepsilon$$
9. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x, y) = 5y + x - 7$. Se sabe que
$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x, y) = 4.$$
Dado $\varepsilon = 0.02$, halle $\delta_{(\varepsilon)} > 0$, tal que
$$\|(x, y) - (1, 1)\| > \delta \qquad \text{si} \qquad |f(x, y) - 4| < \varepsilon$$
10. Demuestre que

    1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x + y^2\right) = 0$
    2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,3)} \left(2x^2 - y^2\right) = -1$
    3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,4)} \left(x^2 + 2x - y\right) = 4$
    4. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,-1)} \left(x^2 + y^2 - 4x + 2y\right) = -4$
    5. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3y^2}{x^2 + y^2} = 0$
    6. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^2 - y^2}{x + y} = 0$
    7. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{7x^2y^2}{2x^2 + 2y^2} = 0$
    8. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$
    9. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} = 0$

11. Calcular los siguientes límites, si existen

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2+y^2-3}{x-2y}$ 2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^4+y^2}}{e^{xy}-2}$ 3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \ln\left|1+x^2y^2\right|$

4. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(5,-1)} \left(x^2+y^2\right)$ 5. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^3+y^3}$ 6. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2}$

7. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x+y}{xy+1}$ 8. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y^2}{x-y}$ 9. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

10. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3y^2}{x^2+y^2}$ 11. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^4}{x^5+6y^5}$ 12. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$

13. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$ 14. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2y^2}{x^2+y^2}$ 15. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

16. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^6+y^4}$ 17. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y}{x^8+y^2}$ 18. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{8x^3y^2}{x^9+y^3}$

19. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$ 20. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ 21. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y}$

22. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^4}{\left(x^2+y^4\right)^3}$ 23. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^3+y^3}$ 24. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

25. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ 26. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ 27. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{x^2+y^2}$

28. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+\cos x}{xy-\cos x}$ 29. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ 30. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{xy-y^3}{\left(x+y+1\right)^2}$

31. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\pi,\pi/4)} \cos\left(3x+y\right)$ 32. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^4}{x^4+y^4}$ 33. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{7x^2y^2}{2x^2+2y^2}$

34. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+y^3}{x^2+y^2}$ 35. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{6x-2y}{9x^2-y^2}$ 36. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

37. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^6+y^4}$ 38. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{7/3}}{x^2+y^2}$ 39. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{y\left(x-1\right)^3}{\left(x-1\right)^2+\left(y+2\right)^2}$

40. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|}$ 41. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{xy+1}{x^2-y}$ 42. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}{y-2x^2}$

43. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ 44. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2+2}$ 45. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}}{x+1}$

46. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(x+y\right)^2-\left(x-y\right)^2}{xy}$ 47. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-3y+1}{x+5y-3}$ 48. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2y}{x^3+y^3}$

49. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \ln\left(2x^2-y^2\right)$ 50. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{xy}\right)$ 51. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3x}{y^6+x^2}$

52. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos x-1-x^2/2}{x^4+y^4}$ 53. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2z^3y}{x^6+z^6}$ 54. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{2x^2y\cos z}{x^2+y^2}$

55. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}\left(xy\right)}{x^2+y^2}$ 56. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{y^3+xz^2}{x^2+y^2+z^2}$ 57. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$

58. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x+y+z}{x+y-z}$ 59. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{2x^2+y^2-z^2}{x^2-y^2}$ 60. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2z^3y}{x^6+y^6}$

61. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^4+yx^3+z^2x^2}{x^2+y^2+z^2}$ 62. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^3+yz^2}{x^4+y^4+z^4}$

63. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2y^2z^2}{x^6+y^6+z^6}$ 64. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xyz}{x^3+y^3+z^3}$

12. Demostrar que los siguientes límites existen

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y}$ 2. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-2)} \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y}$ 3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{xy}$

4. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(xyz)}{xyz}$ 5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$ 6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\tan(x+y)}{x+y}$

7. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\tan\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$ 8. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\cos(xy)-1}{x^2y^2}$ 9. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\cos(x+y)-1}{(x+y)^2}$

10. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{x+y}-1}{x+y}$ 11. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy}-1}{y}$ 12. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy}-1}{xy}$

13. Sean $f,g : I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos funciones definidas en el conjunto I de $\mathbb{R}$. Sean x_0, y_0 dos puntos de I o puntos frontera de I. Suponga que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{y\to y_0} g(y) = M$$

(a) Considere la función $h(x,y) = f(x)+g(y)$. ¿Dónde está definida h?. Demuestre que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y)$$

existe y vale $L+M$.

(b) Considere la función $h(x,y) = f(x)\,g(y)$. ¿Dónde está definida h?. Demuestre que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y)$$

existe y vale LM.

(c) Suponga que $M\neq 0$. Considere la función $h(x,y) = f(x)/g(y)$. ¿Dónde está definida h?. Demuestre que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y)$$

existe y vale L/M.

14. Usando el resultado del ejercicio 13, calcule los siguientes límites

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \left[\dfrac{x^2-1}{x-1}+\dfrac{y-1}{y^2-1}\right]$ 2. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{\left(x^3-1\right)\left(y^4-1\right)}{(x-1)\left(y^2-1\right)}$ 3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen} x\operatorname{sen} 3y}{2xy}$

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{\left(y^2+2y-3\right)(1-\cos x)}{x^2(y-1)}$ 5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(e^x-1)\left(e^{2y}-1\right)}{xy}$

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(1-\cos 2x)(\cos 3y-1)}{5x^2y}$ 7. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{arcsen}(2x)\arctan(3y)}{xy}$

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{\left(x^3+x^2-5x+3\right)\left(y^2-4y+4\right)}{\left(y^4-4y^3+7y^2-12y+12\right)\left(x^3-4x^2+5x-2\right)}$

15. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en el punto $(0,0)$.

1. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

2. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

3. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

4. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

5. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{x+y} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

6. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

7. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

8. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{|x^3|+|y^3|} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

9. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

10. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{6x^3y^3}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

11. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

12. $f(x,y)=\begin{cases} y\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

13. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^6}{(x^2-y)^2+x^6} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

16. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

1. $f(x,y)=x^2+4xy+5y^2-7x+9y-10$

2. $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

3. $f(x,y)=\dfrac{\mathrm{sen}\,x}{\mathrm{sen}\,y}$

4. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^4+3y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

5. $f(x,y)=\dfrac{2x+3y^2}{x^2+y^2+1}$

6. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{6x^3y^3}{x^4+7y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

7. $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

8. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4-3y^4}{x^4+5y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

9. $f(x,y)=\mathrm{sen}\,x+\mathrm{sen}\,y$

10. $f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2 & \text{si} \quad x^2+y^2\leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x^2+y^2>1 \end{cases}$

11. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x-y} & \text{si} \quad x\neq y \\ x-y & \text{si} \quad y=x \end{cases}$

12. $f(x,y)=\begin{cases} \ln(xy-1) & \text{si} \quad xy>1 \\ 0 & \text{si} \quad xy=1 \\ e^{xy-1} & \text{si} \quad xy<1 \end{cases}$

13. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2-25}} & \text{si} \quad x^2+y^2>25 \\ x^2+y^2-24 & \text{si} \quad x^2+y^2=25 \\ 1 & \text{si} \quad x^2+y^2<25 \end{cases}$

14. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{e^{x+y}-1} & \text{si} \quad x+y>0 \\ 2x & \text{si} \quad x+y\leq 0 \end{cases}$

15. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y} & \text{si} \quad x+y\neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x+y=0 \end{cases}$

16. $f(x,y)=\begin{cases} x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x\neq 0 \\ y & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$

17. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{e^{x+y}-1} & \text{si} \quad x+y>0 \\ 2x & \text{si} \quad x+y=0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}\left(x^2-y^2\right)}{x+y} & \text{si} \quad x+y<0 \end{cases}$

18. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x\operatorname{sen}(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x^2+y^2=0 \end{cases}$

19. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x+y} & \text{si} \quad y<|x| \\ 1 & \text{si} \quad y=|x| \\ (x-y)^2-xy & \text{si} \quad y>|x| \end{cases}$

17. Considere la función

$$f(x,y)=\begin{cases} 3xy^2-5^{xy} & \text{si} \quad |x|+|y|\leq 1 \\ 5xy-3^{xy^2} & \text{si} \quad |x|+|y|>1 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de la función en los siguientes puntos

1. $(0,0)$ 2. $(-1,0)$ 3. $(1,1)$ 4. $(-2,2)$ 5. $(0,-1)$

18. Considere la función

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2y^3-2 & \text{si} \quad y-x>0,\ \ y>0 \\ 5xy-3y^2 & \text{si} \quad y+x^2\leq 0 \\ x^3-y^3 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de la función en los siguientes puntos

1. $(0,0)$ 2. $(-1,0)$ 3. $(1,1)$ 4. $(-2,2)$ 5. $(0,-1)$

19. Dada la función

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{3x^3-3y^3}{x^2-y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ a & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Hallar el valor de a para que f sea continua en el origen.

20. Dada la función

$$f(x,y)=\begin{cases} \arctan\left(\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ a & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Hallar el valor de a para que f sea continua en el origen.

21. Sea
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4y^2}{x-2y} & \text{si} \quad x-2y\neq 0\\[2mm] g(x) & \text{si} \quad x-2y=0\end{cases}$$
Si f es continua en todo el plano, encuentre una fórmula para g.

22. Considere la función dada $z=f(x,y)$, la cual no está definida en el $(0,0)$. ¿Es posible definir el valor $f(0,0)$ de tal modo que f sea continua es este punto?. Explique.

   1. $f(x,y)=\dfrac{3x^2y}{x^4+y^4}$
   2. $f(x,y)=\dfrac{3x^2y^3}{x^4+y^4}$
   3. $f(x,y)=\dfrac{5x^2y^2}{x^3+y^6}$
   4. $f(x,y)=\dfrac{3x^2y^8}{x^8+y^8}$
   5. $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$

Bibliografía

1. **Marsden, Jerrold E., y Tromba, Anthony J.**: "*Cálculo vectorial*". Quinta edición. Addison-Wesley.
2. **Apostol, Tom**: "*Calculus*". Volumen II. Segunda Edición. Editorial Reverte
3. **Pita Ruiz, Claudio**: "*Cálculo vectorial*". Primera edición. Prentice Hall Hispanoamericana.
4. **Morales Bueno, Jacinto**: "*Problemario: Ejercicios de Cálculo Diferencial y del Cálculo Integral en Varias Variables Reales*". Tercera Edición. U.S.B.
5. **Bradley, Gerald L., y Smith, Karl J.**: "*Cálculo de varias variables*". Volumen 2. Prentice Hall.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Derivadas parciales

Objetivos a cubrir

Código : MAT-CV.3

- Derivadas parciales de una Función de varias variables. Derivadas direccionales.
- Vector gradiente. Plano tangente.
- Segundas derivadas parciales. Teorema de Schwarz.

Ejercicios

1. Considere la función
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2y}{x^4+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
   (a) Demuestre que la función f es discontinua en $(0,0)$.
   (b) Hallar las derivadas parciales de f respecto a x en $(0,0)$.
   (c) Hallar las derivadas parciales de f respecto a y en $(0,0)$.
   (d) Explique porqué los resultados obtenidos en (1a), (1b) y (1c) no contradice el siguiente resultado
   "Si f es derivable en x_0, entonces es continua en x_0."
2. Considere la función
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
   (a) Demuestre que la función f es discontinua en $(0,0)$.
   (b) Hallar las derivadas parciales de f respecto a x en $(0,0)$.
   (c) Hallar las derivadas parciales de f respecto a y en $(0,0)$.
   (d) Explique porqué los resultados obtenidos en (2a), (2b) y (2c) no contradice el siguiente resultado
   "Si f es derivable en x_0, entonces es continua en x_0."
3. Sea $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por:
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
   (a) ¿Existen $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$? Si existen, calcularlas.
   (b) ¿Es f continua en $(0,0)$?
4. Identifique las expresiones dadas como derivadas parciales de funciones de varias variables respecto alguna de sus variables
   (a) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4y^5-x^4y^5}{h}$.
   (b) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{3y^2\operatorname{sen}(x+h)^2+\tan^2(x+h)-3y^2\operatorname{sen}x^2-\tan^2 x}{h}$.

(c) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{y+h}{x}\right)+3\ln\left(\frac{x}{y+h}\right)-\ln\left(\frac{y}{x}\right)-3\ln\left(\frac{x}{y}\right)}{h}$.

(d) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(x+h)\,y\,\mathrm{sen}\,z}-\sqrt{xy\,\mathrm{sen}\,z}}{h}$.

(e) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{x}{z+h}+\frac{z+h}{y}+(z+h)\cos^5(z+h)^4\right)^{1/3}-\left(\frac{xy+z^2}{zy}+z\cos^5 z^4\right)^{1/3}}{h}$.

(f) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^{x^2y^2z^2}e^{2xhy^2z^2}\left(e^{hyz}\right)^2-e^{(xyz)^2}}{h}$.

(g) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{y\,\mathrm{sen}\,(xz)\,(\cos(xh)-1)+y\cos(xz)\,\mathrm{sen}\,(xh)}{h}$.

5. Obtenga todas las primeras derivadas parciales de las funciones indicadas

1. $f(x,y)=x^2-xy^2+4y^3$
2. $f(x,y)=\dfrac{4\sqrt{x}}{3y^2+1}$
3. $f(x,y)=\left(x^3-y^2\right)^{-1}$
4. $z=\left(-x^4+7y^2+3y\right)^6$
5. $f(x,y)=e^{x^2\tan^{-1}y^2}$
6. $z=xe^{x^3y}$
7. $f(x,y)=\left(x^3-y^2\right)^{-1}$
8. $f(x,y)=\dfrac{xy}{\left(x^2-y^2\right)^2}$
9. $g(u,v)=\ln\left(4u^2+5v^2\right)^{-1}$
10. $w=2y\sqrt{x}-ye^{y/z}$
11. $f(x,y)=x^3y^5-2x^2y+x$
12. $G(p,q,r,s)=\left(p^2q^3\right)^{r^4s^5}$
13. $f(x,y)=x^2y^2\left(x^4+y^4\right)$
14. $f(x,y)=x^4+x^2y^2+y^4$
15. $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$
16. $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$
17. $u=xy^2z^3\ln(x+2y+3z)$
18. $f(x,y)=e^x\tan(x-y)$
19. $f(x,y)=e^{xy}\cos x\,\mathrm{sen}\,y$
20. $f(s,t)=\sqrt{2-3s^2-5t^2}$
21. $f(s,t)=\dfrac{s}{\sqrt{s^2+t^2}}$
22. $f(u,v)=\arctan(u/v)$
23. $f(x,t)=e^{\mathrm{sen}(s/t)}$
24. $g(x,y)=y\tan\left(x^2y^3\right)$
25. $g(x,y)=\ln(x+\ln y)$
26. $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$
27. $f(x,y,z,t)=\dfrac{x-y}{z-t}$
28. $u=z\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{y}{x+z}\right)$
29. $f(x,y,z)=x\sqrt{yz}$
30. $f(x,y,z)=x^2yz^3+xy-z$

6. Sea $f(x,y)=3x^2y^4-12x^6+2xy^5$. Verifique que

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x}+y\,\frac{\partial f}{\partial y}=6f(x,y)$$

7. (a) Calcule la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z=x^3y+5y^2$ con el plano $x=2$, en el punto en el que $y=1$.

   (b) Calcule la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z=x^2+y^3x$ con el plano $y=2$, en el punto en el que $x=2$.

8. Sea

$$f(x,y,z)=x^{y^z}+x^{z^y}+y^{x^z}+y^{z^x}+z^{x^y}+z^{y^x}$$

Calcule las derivadas parciales de esta función en el punto $(1,1,1)$.

9. Sea
$$f(x,y,z) = x^{(y/z)} + x^{(z/y)} + y^{(x/z)} + y^{(z/x)} + z^{(x/y)} + z^{(y/x)}.$$
Calcule las derivadas parciales de esta función en el punto $(1,1,1)$.

10. Demuestre que la ecuación de la recta tangente (cuando existe) a la curva de intersección de la gráfica de la función $z = f(x,y)$ con el plano $y = y_0$ en el punto en el que $x = x_0$ viene dada por
$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 & \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = f(x_0,y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\, t \end{cases}$$

11. Demuestre que la ecuación de la recta tangente (cuando existe) a la curva de intersección de la gráfica de la función $z = f(x,y)$ con el plano $x = x_0$ en el punto en el que $y = y_0$ viene dada por
$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + t & \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = f(x_0,y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\, t \end{cases}$$

12. Calcule las primeras derivadas parciales de cada una de las funciones indicadas, donde $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua

1. $f(x,y) = \displaystyle\int_x^{xy} g(t)\, dt$ 2. $f(x,y) = \displaystyle\int_{x+y}^{x-y} g(t)\, dt$ 3. $f(x,y) = \displaystyle\int_{xy}^{x} \left(x^2+y^2\right) g(t)\, dt$

4. $f(x,y) = \displaystyle\int_{x^y}^{y^x} g(t)\, dt$ 5. $f(x,y) = \displaystyle\int_{\int_1^x g(t)\, dt}^{y} g(t)\, dt$ 6. $f(x,y) = \displaystyle\int_{\int_y^x g(t)\, dt}^{\int_x^y g(t)\, dt} g(t)\, dt$

13. Sea $\overline{z} = \phi(x)$ una función real de variable real, diferenciable en $\mathbb{R}$. Demuestre que la función dada satisface la expresión indicada

1. $f(x,y) = y\phi(x+y)\,; \quad y\left(\dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = z$ 2. $f(x,y) = x^2\phi\left(x^2 y\right); \quad x\dfrac{\partial f}{\partial x} - 2y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2z$

3. $f(x,y) = x^2\phi\left(3x+y^2\right); \quad 2xy\dfrac{\partial f}{\partial x} - 3x\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4yz$ 4. $f(x,y) = x\phi\left(xy^3\right); \quad 3x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3z$

5. $f(x,y) = e^{x+y}\phi(xe^y)\,; \quad x\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = z(x-1)$

14. Sean $g,h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones definidas sobre $\mathbb{R}$ diferenciables. Calcule las primeras derivadas parciales de las siguientes funciones

1. $f(x,y) = g(x) + 5h(y)$ 2. $f(x,y) = 2g(x)h(y) + g^2(x) + \left(y^2\right)$

3. $f(x,y) = \dfrac{1+h(x)}{1+(g(y))^2}$ 4. $f(x,y) = h(x)\, g(h(y)) + g(y)\, h(g(x))$

5. $f(x,y,z) = (g(x))^{h(y)} + (h(y))^{g(z)}$ 6. $f(x,y,z) = xyz\left(1+z^2\right)^{g(x)h(z)}$

7. $f(x,y,z) = (g(x))^{h(y)^{g(z)}}$ 8. $f(x,y,z) = (g(h(x)))^{(h(g(y)))^{g(h(z))}}$

15. Obtenga todas las segundas derivadas de las funciones dadas

1. $f(x,y) = x^2y + x\sqrt{y}$ 2. $z = \cos^2(5x+2y)$ 3. $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+y) + \cos(x-y)$

4. $z = \left(x^2+y^2\right)^2$ 5. $z = t \operatorname{arcsen}\sqrt{x}$ 6. $z = x^{\ln t}$

16. Obtenga la derivada parcial indicada

1. $f(x,y) = e^{xy^2}$; f_{xxy} 2. $z = x \operatorname{sen} y$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}$ 3. $f(x,y) = x^2y^3 - 2x^4y$; f_{xxx}

4. $f(x,y,z) = e^{xyz}$; f_{yzy} 5. $z = x^a y^b z^c$; $\dfrac{\partial^6 z}{\partial x \partial y^2 \partial z^3}$ 6. $z = \ln \operatorname{sen}(x-y)$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$

7. $f(x,y,z) = x^5 + x^4y^4z^3 + yz^2 \ln(xyz)$; f_{xyz} 9. $z = \ln\left(x+2y^2+3z^3\right)$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial z}$

17. Identifique las expresiones dadas como derivadas direccionales de funciones de varias variables en la dirección de un vector unitario $\boldsymbol{v}$.

1. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\left(x+t/\sqrt{2}\right)\left(y+t/\sqrt{2}\right)^2 - xy^2}{t}$ 2. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\left(x+\sqrt{3}t/2\right)^{1/2}(y+t/2)^{1/2} - \sqrt{xy}}{t}$

3. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\ln\left(\operatorname{sen}^2\left((x+t)^4 y\right)\right) - \ln\left(\operatorname{sen}^2\left(x^4y\right)\right)}{t}$ 4. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{(x+t)^2\cos^3(xy+xt) - y^2\cos^3(xy)}{t}$

5. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{(x+2t/3)(y+2t/3)(z-t/3) - xyz}{t}$ 6. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{x^2\left(y-\sqrt{3}t/2\right)(z-t/2) - x^2yz}{t}$

18. Considere la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Demuestre que

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(0,0) \neq a\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + b\frac{\partial f}{\partial y}(0,0),$$

donde $\boldsymbol{v} = (a,b)$ es un vector dado.

19. Determine las derivadas direccionales de $f(x,y) = x + y^2$ en $(3,4)$ en la dirección de un vector tangente a la gráfica de $2x^2 + y^2 = 9$ en $(2,1)$.

20. Si $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - x$, encuentre todos los puntos en donde $D_u\, f(x,y)$ sea cero, en la dirección del vector $\boldsymbol{u} = \left(1, \sqrt{2}\right)$.

21. Calcule la derivada direccional de la función dada en la dirección del vector indicado

1. $f(x,y) = 3x - 2y$, $\boldsymbol{v} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 2. $f(x,y,z,u) = xyzu$, $\boldsymbol{v} = \left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}, 0\right)$

3. $f(x,y,z) = xyz$, $\boldsymbol{v} = \left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$ 4. $f(x,y) = x^3\sqrt{1+3\tan^6\left(x^2+x^2\right)}$, $\boldsymbol{v} = (0,1)$

5. $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\boldsymbol{v} = (a,b)$, en el punto $(0,0)$

22. Suponga que

$$D_{\boldsymbol{u}} f(a,b) = 7; \qquad D_{\boldsymbol{v}} f(a,b) = 3; \qquad \text{donde} \qquad \boldsymbol{u} = \frac{5}{13}\,\boldsymbol{i} - \frac{12}{13}\,\boldsymbol{j}; \qquad \boldsymbol{v} = \frac{5}{13}\,\boldsymbol{i} + \frac{12}{13}\,\boldsymbol{j}.$$

Calcule $\nabla f(a,b)$

23. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^3$ y sea $\boldsymbol{p} \in U$. Suponga que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p}) = 6, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p}) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(\boldsymbol{p}) = 8.$$

Demuestre que

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{p}) = 10$$

es el máximo valor que puede tomar la derivada direccional de f en $\boldsymbol{p}$ y que este se logra en la dirección del vector unitario $\boldsymbol{u} = \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$, ¿Cuál es el mínimo valor (absoluto) que puede tomar $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{p})$?. ¿En qué dirección se tiene este valor?

24. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^2$ y sea $\boldsymbol{p} \in U$. Suponga que

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{p}) = 3, \qquad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{p}) = 2,$$

donde $\boldsymbol{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, y $\boldsymbol{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Calcule las derivadas parciales de f en $\boldsymbol{p}$.

25. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^2$ y sea $\boldsymbol{p} \in U$. Suponga que

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{p}) = a, \qquad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{p}) = b,$$

donde $\boldsymbol{u} = (x_1, y_1)$ y $\boldsymbol{v} = (x_2, y_2)$ son linealmente independientes. Demuestre que las derivadas parciales de f en $\boldsymbol{p}$ son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p}) = \frac{a y_2 - b y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p}) = \frac{b x_1 - a x_2}{x_1 y_2 - x_2 y_1}.$$

26. Demuestre que cada una de las funciones dadas satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

conocida como la **ecuación de Laplace**.

1. $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$
2. $f(x,y) = e^x(\cos y + \operatorname{sen} y)$
3. $f(x,y) = e^x(x\cos y - y \operatorname{sen} y)$
4. $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$
5. $f(x,y) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$
6. $f(x,y) = e^{x^2 - y^2}(\cos 2xy + \operatorname{sen} 2xy)$

27. Si $u = f(x,y)$ y $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, verifique que la **ecuación de Laplace**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

se transforma en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0.$$

28. Verifique que la función $z = \operatorname{sen}\left(x^2 + y^2\right)$ satisface la ecuación

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

29. Verifique que la función $u = (x - at)^2 + (x + at)^3$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

esta ecuación se conoce como la **ecuación de calor**.

30. Sea $u = \phi(x - at) + \psi(x + at)$, donde ϕ y ψ son dos funciones reales de variables real, dos veces derivables. Demuestre que esta función $u = f(x,t)$ es solución de la ecuación de calor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

31. Sea $z = x\phi(x + y) + y\psi(x - y)$, donde ϕ y ψ son dos funciones reales de variables real, dos veces derivables. Demuestre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

32. Demuestre que la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

no satisface las hipótesis del Teorema de Schwarz.

33. La ecuación de Van der Waals del estado para el gas real CO_2 es

$$P = \frac{0.08T}{V - 0.0427} - \frac{3.6}{V^2}.$$

Si dT/dt y dV/dt son las intensidades de variación de la temperatura y del volumen, respectivamente. Aplique la regla de la cadena para evaluar dP/dt.

34. La ecuación de estado de un sistema termodinámico es $F(P,V,T) = 0$, donde P, V y T son presión, volumen y temperatura, respectivamente. Si la ecuación define a V como función de P y T, también define a T como función de V y P. Demuestre que

$$\frac{\partial V}{\partial T} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial T}}{\dfrac{\partial F}{\partial V}} = \frac{1}{\dfrac{\partial T}{\partial V}}.$$

35. Sea $F(t) = f\left(t \operatorname{sen} t, t, t^2\right)$, donde f es diferenciable. Suponga que $\nabla f(0,0,0) = (2,4,7)$. Halle $F'(0)$.

36. Sea $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $g = (g_1, g_2, g_3)$ una función diferenciable, tal que

$$\nabla g_1(0,0) = (1,2); \qquad \nabla g_2(0,0) = (1,2); \qquad \nabla g_3(0,0) = (3,1)$$

y sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, tal que $\nabla f(g(0,0,0)) = (3,-4,2)$. Hallar $\nabla(f \circ g)(0,0)$.

37. Sea $F(x,y) = x^\alpha \phi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, en que ϕ es una función real dos veces diferenciable, de una variable real y α es un número real. Demuestre que

   (a) $x\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha F(x,y)$.

   (b) $x^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = \alpha(\alpha - 1)F(x,y)$.

38. Sea $F(x,y,z) = x^{\alpha}\phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$, en que ϕ es una función real dos veces diferenciable, de una variable real y α es un número real. Demuestre que

(a) $x\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + z\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \alpha F(x,y,z).$

(b) $x^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + z^2\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + 2xy\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + 2xz\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + 2yzx^2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = \alpha(\alpha-1)F(x,y,z).$

39. Sea $F(x,y) = f(x+3y, 2x-y)$, donde $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable. Si $\nabla f(0,0) = (4,-3)$. Determine la derivada de la función F en el origen en la dirección del vector $\boldsymbol{v} = (1,1)$.

40. Sea $F(x,y) = f\left(x^2+y^3, 5x+7, 3x^2y, x^3y^7\right)$, donde $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable. Suponga que $\nabla f(0,0,0,0) = (a,b,c,d)$. Determine la derivada de la función F en el origen en la dirección del vector $\boldsymbol{v} = (\alpha_1, \alpha_2)$.

41. Sea $F(x,y) = f\left(x^2+y, 3xy\right)$, donde $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable. Suponga que $\nabla f(2,3) = (5,4)$. Hallar la dirección del mayor crecimiento de la función F en el punto $P: (1,1)$.

42. Determine la derivada direccional de la función $z = f(x,y)$ dada explicitamente por $x\tan y - ze^z = 0$ en el punto $P: \left(0, \frac{\pi}{4}, 0\right)$ en la dirección del vector $\boldsymbol{u} = (2,1)$.

43. Determine la derivada direccional de la función $u = f(x,y,z)$ definida explicitamente por

$$u + ye^u + x + 3z = 0$$

en el origen de coordenadas en la dirección del vector $\boldsymbol{v} = (1,-1,-1)$.

44. Hallar la dirección de mayor crecimiento de la función $z = f(x,y)$ dada explicitamente por

$$\arctan(x+y+z) + 3xyz + z = 0$$

en el origen de coordenadas.

45. Considere la superficie

$$-2x^2 + 64x - 4y^2 + 64y + z^2 - 768 = 0.$$

¿En qué punto de ella no es posible trazar un plano tangente?. Explique

46. Repita el ejercicio anterior 45 con la superficie

$$-x^2 + x(2z-10) - y^2 + y(2z+14) + z^2 + 8z + 6 = 0.$$

47. Considere la función $z = f(x,y)$ definida implicitamente por la superficie dada $F(x,y,z) = 0$. Calcule las derivadas parciales de segundo orden de la función f

1. $x^2y - 3z + 8yz^3 = 0$
2. $\operatorname{sen}(xy) + z + \operatorname{sen} z = 0$
3. $xe^x + ye^y + ze^z - 3e = 0;$ en el punto $(1,1,1)$.

48. Demuestre que si la superficie S en el espacio $\mathbb{R}^3$ es una superficie de nivel de la función diferenciable $u = f(x,y,z)$ y si $P: (x_0,y_0,z_0) \in S$ es un punto en el que las derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x}(P)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(P)$ y $\frac{\partial F}{\partial z}(P)$ no son simultáneamente cero, entonces la ecuación del plano tangente a S en P viene dada por

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P)\ (x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(P)\ (y-y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(P)\ (z-z_0) = 0.$$

49. Determine la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto P

1. $z^2 + 3z - x^2 - y^2 - 2 = 0; \quad P : (1, 1, 1)$
2. $x - y^2 - z^2 = 0; \quad P : (0, 0, 0)$
3. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y - 16z + 54 = 0; \quad P : (1, 2, 3)$

50. Determine la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2$ que sea paralelo al plano

$$3x + 8y - 5z = 10.$$

51. Halle la ecuación de los planos tangentes a la superficie

$$3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2yz - 12x = 0$$

que sean paralelos al plano $z = 0$.

52. Determine la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + xy$ que sea perpendicular a los planos $x + y - z = 3$ y $2x - y + z = 4$.

53. La recta perpendicular al plano tangente a una superficie en un punto P se dice que es una **recta normal** en P. Obtenga ecuaciones paramétricas de la recta normal en el punto indicado

1. $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4; \quad (1, -1, 1)$
2. $z = 2x^2 - 4y^2; \quad (3, -2, 2)$
3. $z = 4x^2 + 9y^2 + 1; \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3\right)$
4. $x^2 + y^2 - z^2; \quad (3, 4, 5)$

54. Demuestre que toda recta normal a la gráfica de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ pasa por el origen.

55. Determine la ecuación del plano tangente a la superficie $z = 3x^2 - 8xy + 5y^2$ en el punto en que la recta normal tenga por vector director a $\boldsymbol{v} = (-1, 0, 2)$.

56. Halle la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2 - 4x$ que sea perpendicular a la recta

$$x = 3 + 4t, \qquad y = -2t, \qquad z = 1 + t, \quad t \in \mathbb{R}$$

57. Determine las ecuaciones de los planos tangentes al elipsoide $x^2 + 3y^2 + 5z^2 = 1$ que sea paralelos al plano tangente a la superficie $z = xy$ en el punto $P : (1, 1, 1)$.

58. Determine los puntos de la superficie dada en los que los planos tangentes sean paralelos a los planos coordenados

(a) $x^2 + 5y^2 + 10z^2 = 12.$

(b) $(x-2)^2 + 5(y-3)^2 + 10(z+1)^2 = 12.$

(c) $x^2 + 3y^2 + z^2 + 4x - 6y - 2z + 7 = 0.$

(d) $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 18 = 0.$

59. Hallar los puntos del elipsoide $x^2+2y^2+3z^2 = 6$ en los que la recta normal que pasa por ellos es perpendicular al plano $4x - 6y + 3z = 7$.

60. Determine las ecuaciones de los planos tangentes a la superficie $z = x^2 + 3y^2$ en los puntos de intersección de ésta con la recta que resulta de la intersección de los dos planos $2x - y - z = 0$ y $x + 3y - 4z = 0$.

61. Demuestre que los planos tangentes a la superficie $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ cortan a los ejes coordenados en puntos cuya suma de distancias al origen es constante.

1. **Marsden, Jerrold E., y Tromba, Anthony J.**: "*Cálculo vectorial*". Quinta edición. Addison-Wesley.
2. **Apostol, Tom**: "*Calculus*". Volumen II. Segunda Edición. Editorial Reverte
3. **Pita Ruiz, Claudio**: "*Cálculo vectorial*". Primera edición. Prentice Hall Hispanoamericana.
4. **Morales Bueno, Jacinto**: "*Problemario: Ejercicios de Cálculo Diferencial y del Cálculo Integral en Varias Variables Reales*". Tercera Edición. U.S.B.
5. **Bradley, Gerald L., y Smith, Karl J.**: "*Cálculo de varias variables*". Volumen 2. Prentice Hall.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Diferenciabilidad

Objetivos a cubrir

Código : MAT-CV.4

- Diferenciabilidad de funciones de varias variables.
- Funciones de varias variables: Máximos y mínimos relativos y absolutos.
- Método de los Mínimos cuadrados. Multiplicadores de Lagrange.

Ejercicios

1. Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)+y^2 & \text{si} \quad x\neq 0 \\ y^2 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$$

   (a) Probar que f es continua en $(0,0)$.
   (b) Encontrar las derivadas parciales de f en $(0,0)$.
   (c) Probar que f es diferenciable en $(0,0)$.
   (d) Probar que f_x no es continua en $(0,0)$.

2. Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

   Demostrar que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

   Explicar por que no se cumple el resultado conocido sobre independencia del orden de derivación al calcular las derivadas parciales.

3. ¿Es la función

$$f(x,y)=\begin{cases} (x+y)^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x+y}\right) & \text{si} \quad x+y\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x+y=0 \end{cases}$$

   diferenciable en $(0,0)$?.

4. Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

   (a) Demostrar que $\nabla f(0,0)=(0,0)$.
   (b) Calcular $D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} f(0,0)$.
   (c) ¿Por qué no es cierto $D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} f(0,0)=\nabla f(0,0)\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$?.

5. Demuestre que la función $f(x,y)=x^3+y^3$ tiene un punto de ensilladura en el origen.

6. Demuestre que la función $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=x^3+3x+y^3+y$ no tiene extremos locales (Sugerencia: si los tuviera estos deberian ser puntos críticos de f)

7. Demuestre que la función $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z)=x^5+y^5+z^7+4x+2y+9z+3$ no tiene extremos locales.

8. Demuestre que la función $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z)=\arctan(x+2y+3z)$ no tiene extremos locales.

9. Encuentre los puntos críticos de la función dada.

1. $f(x,y)=3x+8y-2xy+4$	2. $f(x,y)=x^2+x+y^2+1$
3. $f(x,y)=x^2+2x+y^2-4y+10$	4. $f(x,y)=2x^3+3x^2+6x+y^3+3y+12$
5. $f(x,y)=(x-y)\,e^{x+2y}$	6. $f(x,y)=x^2y-x^2-3xy+3x+2y-2$
7. $f(x,y)=x\cos y$	8. $f(x,y,z)=3x^4-8y^3+134z^{23}-5$
9. $f(x,y,z)=xy+xz+yz-3$	10. $f(x,y,z)=x+y+z+xy+xz+yz-3$

10. Determine (si los hay) los extremos locales y/o puntos de ensilladura de las funciones dadas

(a) $f(x,y,z)=x^4+y^4+z^4+4x+4y+32z+1.$

(b) $f(x,y,z)=-2x^4-y^4-z^4+8x+4y+4z-2.$

(c) $f(x,y,z)=x^4+2y^4-z^4+10x+12y+9z.$

(d) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{3}x^3-x+2-y^2+2y-z^2+2z.$

(e) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{3}x^3+x+y^2+2y-z^2+2z+3.$

(f) $f(x,y,z)=x^3+3x^2-2y^2+4y-2z^2+6z+2.$

(g) $f(x,y,z)=2\left(x^3+x^2\right)+3x+y^2-10y+z+12.$

(h) $f(x,y,z)=15x^3+6x^2-x+2y^2+y+5z^2+10z-2.$

(i) $f(x,y,z)=x^3+y^2+xy+xz+yz+4y+z-3.$

(j) $f(x,y,z)=2x^3+2y^2+z^2+2xy+xz+yz+z-1.$

(k) $f(x,y,z)=2x^3+2y^2+z^2+2xy+3yz.$

(l) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz+x+y+z+2.$

(m) $f(x,y,z)=-2x^2-y^2-3z^2+xy+2x+2y+3z.$

11. Determine la naturaleza de los puntos críticos de las funciones dadas (si los hay)

1. $f(x,y)=2x^2+3y^2+xy-5x+6y-27$	2. $f(x,y)=xy+x+y+1$
3. $f(x,y)=x^2y^2+2x+2y+1$	4. $f(x,y)=x^3+y^3-3x-3y-2$
5. $f(x,y)=x^4+3y^3-2x^2-3y-1$	6. $f(x,y)=xy(1-x-y)$
7. $f(x,y)=xe^{-x^2-y^2}$	8. $f(x,y)=ye^{-x^2-y^2}$

9. $f(x,y) = x \ln y$

10. $f(x,y) = x \ln y - x$

11. $f(x,y) = 3y \ln x - 4x + 2$

12. $f(x,y) = \left(y^2 - 1\right) \ln x - x$

13. $f(x,y) = \ln\left(1 + x^2 + y^2\right)$

14. $f(x,y) = y \arctan x - 2x - y + 1$

15. $f(x,y) = \cos x + \cos y$

16. $f(x,y) = x + \dfrac{y}{x} + y$

17. $f(x,y) = \left(x^2 - 1\right) e^{-y^2}$

18. $f(x,y) = \left(x^2 - 1\right) e^{-y^2} - y$

12. Obtenga la mejor recta, según el Criterio de Mínimos Cuadrados, que ajusta los datos dados. En cada caso, compare el valor de la variable y correspondiente a cada valor x dado con el obtenido por la recta calculada.

(a)

x	1	2	2.5	3.01	4	5.7
y	0.9	2.11	2.66	2.92	4	5.5

(b)

x	0.21	0.67	1.89	3.33	4.44	8.78
y	-0.4	0.91	4.5	9.11	12.1	26.5

(c)

x	-2.1	0	2.51	3.33	6.71	7.09
y	-1.1	3	7.99	9.62	16.5	25.1

13. En determinadas condiciones, se puede considerar que la reacción de oxidación de tiourea por hexacano ferrato (III) en medio alcalino

$$\mathrm{NH_2CSNH_2} + 10\,(\mathrm{OH})^- + 8\left(\mathrm{Fe}\,(\mathrm{CN})_6\right)^{3-} \longrightarrow \mathrm{NH_2CONH_2} + \mathrm{SO_4^{2-}} + 8\left(\mathrm{Fe}\,(\mathrm{CN})_6\right)^{4-} + 5\mathrm{H_2O}$$

es una reacción de primer orden, para la cual se cumple que

$$C = C_0 e^{-kt},$$

donde C es la concentración molar de hexaciano a un tiempo t, C_0 es la concentración inicial de este reactivo (concentración al tiempo $t = 0$) y k es la llamada *constante de velocidad de reacción* parámetro cuyo conocimiento reporta una gran cantidad de información sobre la misma. Obsérseve que la expresión anterior se puede escribir como

$$\ln C = \ln C_0 - kt$$

de donde queda clara la dependencia lineal entre $\ln C$ y t. El valor de k es una función del pH de la solución reaccionante, de la fuerza iónica y de la temperatura a la que se efectúa la reacción. A continuación se muestran varias tablas de datos obtenidos experimentalmente a diferentes condiciones durante la reacción, en las que se dan los valores de C (en moles por litro) a diferentes tiempos. En cada caso, calcule el valor de k

(a) pH $= 9.0$. Fuerza iónica $=$ Normal. Temperatura $= 40°C$

$t\ (min)$	3	15	40	80	100	120
$C\left(\times 10^4\right)(mol/l)$	7.847	7.406	5.721	3.486	2.867	2.704

(b) pH $= 9.0$. Fuerza iónica $=$ Normal. Temperatura $= 50°C$

$t\ (min)$	3	15	40	80	100	120
$C\left(\times 10^4\right)(mol/l)$	7.406	6.055	2.956	1.800	1.586	1.485

(c) pH $= 11.0$. Fuerza iónica $=$ Normal. Temperatura $= 40°C$

$t\ (min)$	2	7	9	12	16	19
$C\left(\times 10^4\right)(mol/l)$	6.217	4.802	4.032	3.336	2.485	1.791

(d) pH = 11.0. Fuerza iónica = Normal. Temperatura = $50°C$

$t\ (min)$	1	2	3	4	5.5	8
$C\left(\times 10^4\right)(mol/l)$	5.911	4.550	3.033	2.152	1.676	1.356

14. **Regresión lineal en tres variables :** Supongamos que se tienen n datos de tres variables x, y, z a saber (x_i, y_i, z_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, de las cuales se sabe que deben guardar una relación lineal del tipo

$$z = Ax + By + C.$$

Se quiere determinar entonces los coeficientes A, B y C que hacen que los valores z calculados como $z = Ax+By+C$, ajusten lo mejor posible (en el sentido de los mínimos cuadrados) los datos proporcionados. Desde este punto de vista geométrico, se trata de determinar el plano $z = Ax + By + C$ que mejor ajuste los n puntos dados $(x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2 \ldots, n$. Considerando entonces la suma de los cuadrados de las diferencias de z_i con $Ax_i + By_i + C$, que es el valor de z en el punto (x_i, y_i) según el plano que se quiere determinar, se trata de hallar los valores de A, B y C que hagan que esta suma sea la menor posible. Es decir, se trata de hallar los valores de A, B y C que hagan que

$$S = S(A, B, C) = \sum_{i=1}^{n} \left(z_i - (Ax_i + By_i + C)\right)^2$$

sea mínima. Demuestre que resolviendo el sistema

$$\frac{\partial S}{\partial A} = 0; \qquad \frac{\partial S}{\partial B} = 0; \qquad \frac{\partial S}{\partial C} = 0$$

se obtiene, como único punto crítico, A, B, C, donde

$$C = \overline{z} - A\overline{x} - B\overline{y}$$

y A y B son las soluciones del sistema

$$\begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\ \overline{x}^{-2} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\ \overline{x}\ \overline{y} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\ \overline{x}\ \overline{y} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\ \overline{y}^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i (z_i - \overline{z}) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i (z_i - \overline{z}) \end{bmatrix}$$

donde $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\overline{y} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i$, $\overline{z} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} z_i$ son las medias aritméticas de los valores dados x_i, y_i, z_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, las sumas son de $i = 1$ a $i = n$. Es claro que este punto crítico debe tratarse de un mínimo para la función $S(A, B, C)$ (¿Por qué?). Tome este resultado como base para obtener el mejor ajuste lineal del tipo $z = Ax + By + C$ para cada uno de los siguientes conjuntos de datos.

(a)

x	0	0.8	1	3
y	0.1	-0.5	-1	-2
z	1.1	1.3	1	2

(b)

x	1.8	4.2	-0.3	2	3
y	0.5	2.1	3.2	-0.4	1
z	2	1.8	-2.7	3.5	2.5

(c)

x	-0.1	2	1.4	-3.5	0	-1
y	3.2	0	5.3	-0.4	-1.6	2
z	-0.2	2.5	-0.42	0	2.35	0.1

(d)

x	0.4	2.3	-0.2	1.3	0
y	-1	1.7	0.8	1.1	3
z	-4.5	2	1.5	0.9	8.05

(e)

x	0	-1	2	3
y	5	0.4	-1.5	0.5
z	0.9	0	-4.7	-5.1

15. Determine los extremos de la función $f(x,y) = 2x - y$, con la restricción $g(x,y) = 3x^2 + 2y^2 - 33/2 = 0$.

16. Determine los extremos de la función $f(x,y) = x + 3y$, con la restricción $g(x,y) = 2x^2 + y^2 - 38 = 0$.

17. Determine los extremos de la función $f(x,y) = 3x - 7y$, con la restricción $g(x,y) = 4x^2 + 3y^2 - 892/3 = 0$.

18. Halle los extremos de la función $f(x,y) = -2x - 5y$, sujeta a la restricción $g(x,y) = 3x^2 + y^2 - 237 = 0$.

19. Halle los extremos de la función $f(x,y) = x + 2y$, sujeta a la restricción $g(x,y) = x^2 + y^2 - 5 = 0$.

20. Determine el valor máximo que puede tomar el producto de dos números positivos, si la suma de éstos debe ser 20.

21. Determine el valor máximo que puede tomar el producto de tres números positivos, si la suma de éstos debe ser 20.

22. Determine los extremos de la función $f(x,y) = x^2y^2$, si (x,y) se encuentra en el círculo $x^2 + y^2 = 1$.

23. Determine los extremos de la función $f(x,y) = x^2y$, si (x,y) se encuentra en la elipse $2x^2 + y^2 = 3$.

24. Determine los extremos de la función $f(x,y) = x^2 + 8y$, si (x,y) se encuentra en la elipse $x^2 + 4y^2 = 5$.

25. A continuación se da una función de dos variables $z = f(x,y)$, de la que se quiere determinar los extremos cuando sus variables están sujetas a la restricción $g(x,y) = 0$. Esto se puede resolver como problema de extremos condicionados, ó bien haciendo explicita una de las variables x ó y de la restricción dada y sustituyendo esta en la función f dada, convirtiendo así el problema en la determinación de extremos locales de una función de una sola variable. Resuelva los siguientes ejercicios de las dos maneras mencionadas.

    (a) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2y, \quad g(x,y) = x + y - 3 = 0.$

    (b) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 3xy + 1, \quad g(x,y) = x - y - 1 = 0.$

    (c) $f(x,y) = 2x^3 + x^2y, \quad g(x,y) = x + y - 2 = 0.$

    (d) $f(x,y) = 3x^3 + y^3 + x^2y, \quad g(x,y) = x + y - 5 = 0.$

    (e) $f(x,y) = 16x^3 + y^3 + 3x^2y, \quad g(x,y) = x + y - 6 = 0.$

26. Halle los extremos de la función $f(x,y,z) = 2x + 3y + z$, sujeta a la restricción

$$g(x,y,z) = 4x^2 + 3y^2 + z^2 - 80 = 0.$$

27. Determine los extremos de la función $f(x,y,z) = -x - 4y + 5z$, sujeta a la restricción

$$g(x,y,z) = 5x^2 + y^2 + z^2 - 1030 = 0.$$

28. Halle los extremos de la función $f(x,y,z) = x - y - z$, si (x,y,z) está en el elipsoide $x^2 + 2y^2 + z^2 = 50$.

29. Halle los extremos de la función $f(x,y,z) = 2x - 3y + z$, si (x,y,z) está en el elipsoide $4x^2 + y^2 + z^2 = 704$.

30. Determine los puntos (x,y,z) del elipsoide $2x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 70$ de modo que la suma de su primera y tercera coordenadas sea la mayor y la menor posible.

31. Determine los puntos más cercanos y más lejanos del origen de la curva cerrada $x^2 + y^2 + xy = 4$.

32. Determine los puntos más cercanos y más lejanos del origen de la curva $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$.

33. Determine los puntos más cercanos y más lejanos del origen de la superficie

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4.$$

34. Determine los semiejes de la elipse que se obtiene al intersectar el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $x + y + z = 0$, determinando los extremos condicionados de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a las dos restricciones $x^2 + y^2 - 1 = 0$ y $x + y + z = 0$.

35. Hallar el valor máximo y mínimo del producto de tres números reales x, y, z, si la suma de estos debe ser cero y la suma de sus cuadrados dese ser uno.

36. Demostrar que el paralelepípedo de mayor volumen que se puede inscribir en una esfera es un cubo.

Bibliografía

1. **Marsden, Jerrold E., y Tromba, Anthony J.**: "*Cálculo vectorial*". Quinta edición. Addison-Wesley.
2. **Apostol, Tom**: "*Calculus*". Volumen II. Segunda Edición. Editorial Reverte
3. **Pita Ruiz, Claudio**: "*Cálculo vectorial*". Primera edición. Prentice Hall Hispanoamericana.
4. **Morales Bueno, Jacinto**: "*Problemario: Ejercicios de Cálculo Diferencial y del Cálculo Integral en Varias Variables Reales*". Tercera Edición. U.S.B.
5. **Bradley, Gerald L., y Smith, Karl J.**: "*Cálculo de varias variables*". Volumen 2. Prentice Hall.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Funciones vectoriales

Objetivos a cubrir

Código : MAT-CV.5

- Funciones vectoriales: Dominio. Límite. Continuidad. Diferenciabilidad.
- Caminos. Parametrizaciones y reparametrizaciones. Longitud de arco.

Ejercicios

1. Halle el dominio de las funciones vectoriales dadas

   1. $\boldsymbol{F}(t) = 2t\ \boldsymbol{i} - 3t\ \boldsymbol{j} + \dfrac{1}{t}\ \boldsymbol{k}$ 2. $\boldsymbol{F}(t) = \operatorname{sen} t\ \boldsymbol{i} - \cos t\ \boldsymbol{j} + \tan t\ \boldsymbol{k}$

   3. $h(t)\,\boldsymbol{F}(t)$ donde $h(t) = \operatorname{sen} t$ y $\boldsymbol{F}(t) = \dfrac{1}{\cos t}\ \boldsymbol{i} + \dfrac{1}{\operatorname{sen} t}\ \boldsymbol{j} + \dfrac{1}{\tan t}\ \boldsymbol{k}$

   4. $\boldsymbol{F}(t) - \boldsymbol{G}(t)$ donde $\boldsymbol{F}(t) = \ln t\ \boldsymbol{i} + 3t\ \boldsymbol{j} - t^2\ \boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{G}(t) = \boldsymbol{i} + 5t\ \boldsymbol{j} + t^2\ \boldsymbol{k}$

2. Halle una función vectorial $\boldsymbol{F}$ cuya gráfica sea la curva dada

   1. $y = x^2$ y $z = 2$ 2. $x = 2t;\ \ y = 1 - t;\ \ z = \operatorname{sen} t$ 3. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ y $x = y^2$

3. Calcule los siguientes límites, si existen

   1. $\displaystyle\lim_{t\to 1}\left[3t\ \boldsymbol{i} + 2^{2t}\ \boldsymbol{j} + \operatorname{sen}(\pi t)\ \boldsymbol{k}\right]$ 2. $\displaystyle\lim_{t\to 1}\left[\frac{t^3-1}{t-1}\ \boldsymbol{i} + \frac{t^2-3t+2}{t^2+t-2}\ \boldsymbol{j} + \left(t^2+1\right)e^{t-1}\ \boldsymbol{k}\right]$

   3. $\displaystyle\lim_{t\to 1}\left[2t\ \boldsymbol{i} - 3\ \boldsymbol{j} + e^t\ \boldsymbol{k}\right]$ 4. $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen} t}{t}\ \boldsymbol{i} + \frac{1-\cos t}{t}\ \boldsymbol{j} + e^{t-1}\ \boldsymbol{k}\right]$

4. Halle los valores de t para los que las funciones dadas sean continuas

   1. $\boldsymbol{F}(t) = t\ \boldsymbol{i} + 3\ \boldsymbol{j} - (1-t)\ \boldsymbol{k}$ 2. $\boldsymbol{F}(t) = \dfrac{\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}}{t^2+t}$ 3. $\boldsymbol{F}(t) = e^t\left(t\ \boldsymbol{i} + \dfrac{1}{t}\ \boldsymbol{j} + 3\ \boldsymbol{k}\right)$

5. Halle los vectores $\boldsymbol{F}'$ y $\boldsymbol{F}''$.

   1. $\boldsymbol{F}(t) = t^2\ \boldsymbol{i} + t^{-1}\ \boldsymbol{j} + e^{2t}\ \boldsymbol{k}$ 2. $\boldsymbol{F}(s) = \ln s\,(s\ \boldsymbol{i} + 5\ \boldsymbol{j} - e^s\ \boldsymbol{k})$ 3. $\boldsymbol{F}(t) = \operatorname{sen} t\ \boldsymbol{i} + \cos t\ \boldsymbol{j} + t^2\ \boldsymbol{k}$

6. Sea $\boldsymbol{R}(t)$ el vector posición de un punto móvil en el espacio. Halle los vectores velocidad, aceleración y la dirección del movimiento, así, como la velocidad para el valor dado de t.

   1. $\boldsymbol{R}(t) = t\ \boldsymbol{i} + t^2\ \boldsymbol{j} + 2t\ \boldsymbol{k}$ en $t = 1$ 2. $\boldsymbol{R}(t) = \cos t\ \boldsymbol{i} + \operatorname{sen} t\ \boldsymbol{j} + 3t\ \boldsymbol{k}$ en $t = \pi/4$

   3. $\boldsymbol{R}(t) = e^t\ \boldsymbol{i} + e^{-t}\ \boldsymbol{j} + e^{2t}\ \boldsymbol{k}$ en $t = \ln 2$

7. Halle los vectores tangentes a la gráfica de la función vectorial $\boldsymbol{F}$ para los valores dados de t.

   (a) $\boldsymbol{F}(t) = t^2\ \boldsymbol{i} + 2t\ \boldsymbol{j} + \left(t^3 + t^2\right)\ \boldsymbol{k}$ en $t = 0,\ t = 1$ y $t = -1$.

   (b) $\boldsymbol{F}(t) = \dfrac{t\ \boldsymbol{i} + t^2\ \boldsymbol{j} + t^3\ \boldsymbol{k}}{1+2t}$ en $t = 0,$ y $t = 2$.

   (c) $\boldsymbol{F}(t) = \operatorname{sen} t\ \boldsymbol{i} + \cos t\ \boldsymbol{j} + at\ \boldsymbol{k}$ en $t = 0,\ t = \dfrac{\pi}{2}$ y $t = \pi$.

8. El vector velocidad de un móvil en el espacio es $\boldsymbol{V}(t) = \dfrac{d\boldsymbol{R}}{dt} = e^t\ \boldsymbol{i} + t^2\ \boldsymbol{j}$. Halle la posición del punto en función de t sabiendo que $\boldsymbol{R}(0) = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$.

9. Halle $\displaystyle\int_0^1 \boldsymbol{F}(t)\ dt$ para
$$\boldsymbol{F}(t) = t\ \sqrt{1+t^2}\ \boldsymbol{i} + \frac{1}{1+t^2}\ \boldsymbol{j}.$$

10. Dado $\boldsymbol{F}(t) = e^{kt}\ \boldsymbol{i} + e^{-kt}\ \boldsymbol{j}$, donde k es constante. Demuestre que $\boldsymbol{F}(t)$ y $\boldsymbol{F''}$ son paralelos para todo t.

11. Halle el vector tangente unitario $\boldsymbol{T}(t)$ y el vector normal principal unitario para cada curva dada por

    1. $\boldsymbol{R}(t) = t^2\ \boldsymbol{i} + t^3\ \boldsymbol{j},\ \ t \neq 0$ 2. $\boldsymbol{R}(t) = e^t \cos t\ \boldsymbol{i} + e^t \operatorname{sen} t\ \boldsymbol{j}$ 3. $\boldsymbol{R}(t) = \ln t\ \boldsymbol{i} + t^2\ \boldsymbol{j}$

    4. $\boldsymbol{R}(t) = \cos t\ \boldsymbol{i} + \operatorname{sen} t\ \boldsymbol{j} + t\ \boldsymbol{k}$

12. Grafique la curva dada y halle su longitud en el intervalo indicado

    1. $\boldsymbol{R}(t) = 2t\ \boldsymbol{i} + t\ \boldsymbol{j}$ sobre $[0,4]$ 2. $\boldsymbol{R}(t) = 3t\ \boldsymbol{i} + 3\cos t\ \boldsymbol{j} + 3\operatorname{sen} t\ \boldsymbol{j}$ sobre $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

    3. $\boldsymbol{R}(t) = \cos t\ \boldsymbol{i} + \operatorname{sen} t\ \boldsymbol{j} + t\ \boldsymbol{j}$ sobre $[0,\pi]$

13. Halle los vectores unitarios tangente $\boldsymbol{T}$ y normal principal $\boldsymbol{N}$ de la curva $\boldsymbol{R}(t) = \ln(\operatorname{sen} t)\ \boldsymbol{i} + \ln(\cos t)\ \boldsymbol{j}$ en el punto $x = \dfrac{\pi}{3}$.

14. Dada la curva
$$\boldsymbol{R}(t) = \operatorname{sen} t\ \boldsymbol{i} + \cos t\ \boldsymbol{j} + t\ \boldsymbol{k}$$
    (a) Halle el vector tangente unitario $\boldsymbol{T}$ en el punto de la curva en que $t = \pi$.
    (b) Halle la longitud de la curva desde $t = 0$ hasta $t = \pi$.

15. La recta tangente, o simplemente la tangente, a una curva alabeada C en un punto P es la recta que pasa por P y tiene como dirección el vector $\boldsymbol{T}$ tangente unitario a C en P. Halle las ecuaciones paramétricas de la tangente a $\boldsymbol{R}(t) = 2t\ \boldsymbol{i} - t\ \boldsymbol{j} + t^2\ \boldsymbol{k}$ en $P(2,-1,1)$.

16. Describa la traza del camino $\boldsymbol{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dado por $\boldsymbol{F}(t) = (a,b)$.

17. Sea $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua definida en el intervalo I de $\mathbb{R}$. Considere el camino $\boldsymbol{F} : I \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{F}(t) = (t, \varphi(t))$. Demuestre que éste debe ser un camino simple. ¿Puede ser un camino cerrado?

18. Demuestre que todo camino de tipo $\boldsymbol{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{F}(t) = (at+b, ct+d)$, donde a y c son reales no nulos, es simple. Describa su traza.

19. Demuestre que el camino $\boldsymbol{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{F}(t) = \left(t^2+1, t^2-1\right)$ no es simple. Describa su traza.

20. Demuestre que el camino $\boldsymbol{G} : [1,\infty) \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{G}(t) = (t, t-1)$ es simple. Describa la traza de $\boldsymbol{G}$ y compare con el ejercicio 19.

21. Demuestre que el camino $\boldsymbol{F} : [-2,2] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{F}(t) = \left(t^2-1, t^3+2t^2-t-2\right)$ no es simple. ¿Es cerrado?, ¿es cerrado simple?.

22. Repita el ejercicio 21 con el camino $\boldsymbol{F} : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{F}(t) = \left(t^2-1, t^3+2t^2-t-2\right)$.

23. Considere el camino $\boldsymbol{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{F}(t) = (\cosh t, \operatorname{senh} t)$. Describa la traza de $\boldsymbol{F}$.

24. Encuentre los valores de t para los cuales la curva $\boldsymbol{F}(t) = \left(\dfrac{t^2}{1-t}, \dfrac{t}{t^2-1}\right)$ se autointersecta.

25. Encuentre los valores de t para los cuales la curva $\boldsymbol{F}(t) = \left(t^3-3t, 3t^2\right)$ se autointersecta.

26. Considere el camino $\boldsymbol{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{F}(t) = (a, \varphi(t))$, donde a es un número real dado. Describa la traza de $\boldsymbol{F}$ en términos del rango de la función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Suponga que ésta es una función inyectiva. ¿Qué puede decir del camino $\boldsymbol{F}$ si φ es sobreyectiva?, ¿si φ es biyectiva?.

27. Repita el ejercicio 26 con el camino $\boldsymbol{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{F}(t) = (\varphi(t), a)$.

28. Sea $\boldsymbol{F} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ un camino y sea $\boldsymbol{u}$ un vector en $\mathbb{R}^2$ dado. Considere el camino $\boldsymbol{G} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{G}(t) = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{F}(t)$. Describa la traza de $\boldsymbol{G}$ en términos de la traza de $\boldsymbol{F}$.

29. Sean $\boldsymbol{u_0}$, y $\boldsymbol{u_1}$ dos vectores en $\mathbb{R}^2$. Considere el camino $\boldsymbol{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{u_0} + t\boldsymbol{u_1}$. Describa la traza de $\boldsymbol{F}$.

30. Sean $\boldsymbol{u_0}$, $\boldsymbol{u_1}$ y $\boldsymbol{u_2}$ tres vectores en $\mathbb{R}^2$. Considere el camino $\boldsymbol{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{u_0} + t\boldsymbol{u_1} + t^2\boldsymbol{u_2}$. Describa la traza de $\boldsymbol{F}$ en cada uno de los casos

    (a) Los vectores $\boldsymbol{u_1}$ y $\boldsymbol{u_2}$ son linealmente independientes.

    (b) Los vectores $\boldsymbol{u_1}$ y $\boldsymbol{u_2}$ son linealmente dependientes.

31. Describa la traza del camino $\boldsymbol{F} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{F}(t) = (a\cos t, b\,\mathrm{sen}\, t)$, en cada uno de los casos

    1. $a = b$ 2. $a \neq b$

32. Sean $\boldsymbol{u_0}$, $\boldsymbol{u_1}$ y $\boldsymbol{u_2}$ tres vectores en $\mathbb{R}^2$. Considere el camino $\boldsymbol{F} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, dado por

$$\boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{u_0} + \cos t\ \boldsymbol{u_1} + \mathrm{sen}\, t\ \boldsymbol{u_2}.$$

    Demuestre que si $\boldsymbol{u_1}$ y $\boldsymbol{u_2}$ son linealmente independientes la traza de $\boldsymbol{F}$ es una elipse. ¿Qué pasa si los vectores son linealmente dependientes?

33. Considere el camino $\boldsymbol{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{F}(t) = (t, \varphi(t), a)$, donde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua. Describa la traza de $\boldsymbol{F}$.

34. Repita el ejercicio 33 con los caminos $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{G}(t) = (t, a, \varphi(t))$ y $\boldsymbol{H}(t) = (a, t, \varphi(t))$.

35. Describa la traza de los caminos $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{H} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{F}(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\, t, 0)$, $\boldsymbol{G}(t) = (\cos t, 0, \mathrm{sen}\, t)$, $\boldsymbol{H}(t) = (0, \mathrm{sen}\, t, \cos t)$

36. Se dice que el camino $\boldsymbol{F} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ $\boldsymbol{F}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ se encuentra sobre la esfera

$$S = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\right\}$$

    si $\boldsymbol{F}(t) \in S$, para todo $t \in I$ (es decir, si $(f_1(t))^2 + (f_2(t))^2 + (f_3(t))^2 = r^2$ para todo $t \in I$). Demuestre que los caminos $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ y $\boldsymbol{H}$ del ejercicio 35 se encuentran sobre la esfera unitaria.

37. Se dice que la curva, imagen del camino $\boldsymbol{F} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ $\boldsymbol{F}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ es una curva plana, si hay un plano

$$S = \{(x, y, z) : ax + by + cz = d\},$$

    tal que, $\boldsymbol{F}(t) \in S$, para todo $t \in I$ (en cuyo caso se dice que el camino $\boldsymbol{F}$, o la curva que describe, se encuentra sobre el plano S). Considere los caminos $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ y $\boldsymbol{H}$ de los ejercicios 33 y 34. Demuestre que las curvas que estos describen son planas.

38. Demuestre que el camino $\boldsymbol{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{F}(t) = \left(t^2 + t + 1, t^2 - 1, t + 2\right)$ se encuentra sobre el plano $z = x - y$.

39. Demuestre que el camino $\boldsymbol{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{F}(t) = \left(a\cos^2 t, \dfrac{b}{2}\mathrm{sen}^2\, t, \dfrac{c}{2}\mathrm{sen}^2\, t\right)$ se encuentra sobre el plano $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

40. Sean $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dos caminos diferenciables. Demuestre las siguientes fórmulas para las derivadas de las funciones suma y producto cruz de los caminos $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{G}$

    1. $(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G})'(t) = \boldsymbol{F'}(t) + \boldsymbol{G'}(t)$ 2. $(\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G})'(t) = \boldsymbol{F}(t) \times \boldsymbol{G}'(t) + \boldsymbol{F}'(t) \times \boldsymbol{G}(t)$

41. ¿Cierto o falso?. Si $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ son dos caminos regulares, entonces $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es un camino regular.

42. Hallar la derivada del camino dado en el punto indicado

    1. $\boldsymbol{F}(t) = \left(\operatorname{sen}^2 t, \operatorname{sen}\left(t^2\right)\right)$ para $t = \dfrac{\pi}{2}$
    2. $\boldsymbol{F}(t) = \left(e^{-t^2/2}, -\dfrac{t^2}{2}, \ln\left(t^2 + \dfrac{1}{2}\right)\right)$ para $t = 1$
    3. $\boldsymbol{F}(t) = \left(\cos t, \cos^2 2t, \cos^3 3t\right)$ para $t = \pi$
    4. $\boldsymbol{F}(t) = \left(\sqrt{3t+1}, \ln^3\left(t^2+1\right)\right)$ para $t = 0$

43. Diga si el camino $\boldsymbol{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es: **a.** diferenciable, **b.** regular. Justifique su respuesta.

    1. $\boldsymbol{F}(t) = (3t - 1, 4t + 5)$
    2. $\boldsymbol{F}(t) = \left(2t^2 + 4, 4t^3 - 2t^2 + 1\right)$
    3. $\boldsymbol{F}(t) = \left(t, t^{2/3}\right)$
    4. $\boldsymbol{F}(t) = \left(t, t^5 + 3t^4 - 5t^3 + 9t^2 - 10t + 23\right)$
    5. $\boldsymbol{F}(t) = \left(t^3, t^2\right)$

44. Considerando el camino regular $\boldsymbol{F} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{F}(t) = (t, \varphi(t))$, demuestre que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en el punto $x = x_0 \in I$, es

$$y = \varphi'(x_0)(x - x_0) + \varphi(x_0).$$

45. Determine la ecuación de la recta tangente y del plano normal a la curva descrita por el camino

$$\boldsymbol{F} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

en el punto indicado

    1. $\boldsymbol{F}(t) = (t + 1, 3t - 1, 2t - 5)$, en $p = \boldsymbol{F}(t_0)$
    2. $\boldsymbol{F}(t) = \left(t^3 - 2t, t^2 + 1, 3\right)$, en $p = \boldsymbol{F}(1)$
    3. $\boldsymbol{F}(t) = (\cos 3t, \operatorname{sen} 3t, 3t)$, en $p = \boldsymbol{F}(0)$
    4. $\boldsymbol{F}(t) = \left(e^{-2t}, e^{-t}, t\right)$, en $p = \boldsymbol{F}(0)$
    5. $\boldsymbol{F}(t) = \left(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t, 5t\right)$, en $p = \boldsymbol{F}(0)$
    6. $\boldsymbol{F}(t) = (3\cos t, 1, 2\operatorname{sen} t)$, en $p = \boldsymbol{F}(\pi)$
    7. $\boldsymbol{F}(t) = \left(-2, 5\cos^2 t, 10e^{-t/2}\right)$, en $p = \boldsymbol{F}(0)$

46. ¿Cierto o falso? Si $\boldsymbol{F} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es un camino diferenciable, tal que, $\boldsymbol{F}(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, entonces la función $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \|\boldsymbol{F}(t)\|$ es diferenciable y $\left\|\boldsymbol{F}'(t)\right\| = \|\boldsymbol{F}(t)\|'$, es decir, $\varphi\left(\boldsymbol{F}'(t)\right) = \varphi'(\boldsymbol{F}(t))$. Si es cierto, demuéstrelo. Caso contrario, dé un contraejemplo.

47. ¿Cierto o falso? Si $\boldsymbol{F} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es un camino diferenciable, tal que, $\boldsymbol{F}(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, entonces $\boldsymbol{F}(t) \cdot \boldsymbol{F}'(t) = \|\boldsymbol{F}(t)\| \left\|\boldsymbol{F}'(t)\right\|$ Si es cierto, demuéstrelo. Caso contrario, dé un contraejemplo.

48. ¿Cierto o falso? Si $\boldsymbol{F} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es un camino diferenciable, tal que, $\boldsymbol{F}(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, entonces $\boldsymbol{F}(t) \cdot \boldsymbol{F}'(t) = \|\boldsymbol{F}(t)\| \|\boldsymbol{F}(t)\|'$ Si es cierto, demuéstrelo. Caso contrario, dé un contraejemplo.

49. Sea $\boldsymbol{F} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ el camino $\boldsymbol{F}(t) = (a\cos t, b\operatorname{sen} t)$, donde a y b son dos reales positivos. Demuestre que $\boldsymbol{F}(t)$ es perpendicular a $\boldsymbol{F}'(t)$, para todo t en $[0, 2\pi]$ si y solo si $a = b$. Interprete este hecho geométricamente.

50. Hallar el(los) valor(es) de t para los cuales el vector tangente al camino

$$\boldsymbol{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad \text{dado por} \qquad \boldsymbol{F}(t) = \left(2t^2 + 1, 3t - 2\right)$$

sea paralelo al vector $\boldsymbol{v} = (2, -1)$.

51. Considere el camino $\boldsymbol{F} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{F}(t) = (a\cos t, b\operatorname{sen} t)$, donde a y b son dos números reales positivos. Compruebe que se trata de un camino cerrado (¿cuál es su traza?) Determine el(los) valor(es) $t \in [0, 2\pi]$ en los que $\boldsymbol{F}'(t)$ toma las direcciones de los siguientes vectores

    1. $\boldsymbol{i}$
    2. $-\boldsymbol{i}$
    3. $\boldsymbol{j}$
    4. $-\boldsymbol{j}$
    5. $(1, 1)$
    5. $(-1, -1)$

52. Grafique las siguientes curvas, haciendo un estudio detallado de la misma

1. $\boldsymbol{F}(t)=\left(\dfrac{t^2}{1-t^2},\dfrac{t^2}{1-t}\right)$ 2. $\boldsymbol{F}(t)=\left(\dfrac{2e^t}{t-1},\dfrac{t}{t-1}\right)$ 3. $\boldsymbol{F}(t)=\left(\dfrac{2t-1}{t^2-1},\dfrac{t^2}{t-1}\right)$

4. $\boldsymbol{F}(t)=\left(\dfrac{4t}{1-t^4},\dfrac{4t^2}{1-t^4}\right)$ 5. $\boldsymbol{F}(t)=\left(e^{1/t},\dfrac{1}{t-1}\right)$ 6. $\boldsymbol{F}(t)=\left(\dfrac{t}{1-t^2},\dfrac{t^2}{1-t}\right)$

53. Determinar los puntos en que la recta tangente a la curva descrita por el camino

$$\boldsymbol{F}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3, \qquad \text{dado por}, \qquad \boldsymbol{F}(t)=\left(3t-t^3,3t^2,3t+t^3\right)$$

es paralela al plano $3x+y+z=5$.

54. Demuestre que el punto p en que la recta, imagen del camino $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{F}(t)=(at+\alpha,bt+\beta,ct+\gamma)$, está más cerca del origen, es $p=\boldsymbol{F}(t_0)$, donde $t_0=-\dfrac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a^2+b^2+c^2}$.

55. Determine una función $\boldsymbol{\lambda}:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ que parametrice la curva indicada

(a) El eje x, recorrido de izquierda a derecha.

(b) El eje y, recorrido de arriba hacia abajo.

(c) La recta $y=2x$, recorrida del tercero al primer cuadrante.

(d) La cuarta parte del círculo $x^2+y^2=3$ que se encuentra en el segundo cuadrante, recorrido en sentido antihorario.

(e) La cuarta parte del círculo $x^2+y^2=3$ que se encuentra en el segundo cuadrante, recorrido en sentido horario.

(f) El cuadrado $|x|+|y|=1$, recorrido en sentido antihorario.

(g) El triángulo cuyos vértices son $A(0,0)$, $B(3,1)$, $C(2,5)$, con el recorrido $A\to B\to C\to A$.

(h) El segmento de la curva $y=|1-|x||$ comprendido entre $x=-2$ y $x=2$, recorrido de izquierda a derecha.

(i) El segmento de la curva $y=\left|x^2-1\right|$ comprendido entre $x=-2$ y $x=2$, recorrido de derecha a izquierda.

56. Determine una función $\boldsymbol{\lambda}:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ que parametrice la curva indicada

(a) El eje x, recorrido en su dirección positiva.

(b) El eje y, recorrido en su dirección negativa.

(c) El eje z, recorrido en su dirección negativa.

(d) La parte de la recta $y=2x=3z$, que se encuentra en el primer octante, comenzando con el origen.

(e) La parte de la recta que resulta de la intersección de los dos planos $x+2y-z=0$ y $3x-y+5z=0$, correspondiente a $z\geq 0$, comenzando en el origen.

(f) El círculo que resulta de la intersección del paraboloide $z=x^2+y^2$ con el plano $z=4$ comenzando en el punto $(0,2,4)$ con el sentido $(0,2,4)\to(-2,0,4)\to(0,-2,4)\to(2,0,4)\to(0,2,4)$.

57. Parametrizar la curva intersección de la superficie esférica de ecuación $x^2+y^2+z^2=1$ con el plano de ecuación $x+y+z=0$.

58. Parametrizar la curva C contenida en la región definida por las condiciones $0\leq x\leq 1$ que se obtiene como intersección de la superficie de ecuación $z=xy$ y del plano de ecuación $x+y+z=0$. La orientación de C es del punto $(0,0,0)$ al punto $\left(1,-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$.

59. Parametrizar la curva C intersección de las superficies de ecuaciones $x+y=2$ y $x^2+y^2+z^2=2(x+y)$.

60. Parametrizar la curva C intersección de la superficie esférica $x^2+y^2+z^2=9$ con el plano de ecuación $z=2$.

61. Sea C la curva de origen el punto $(a,0,0)$ que se obtiene como intersección de las superficies $x+z=a$, $x^2+y^2+z^2=a^2$, $a>0$ es una constante. Parametrizar C.

62. (a) Determine una parametrización de la curva C que es intersección de la superficie del elipsoide $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}+z^2=1$ y el plano de ecuación $x+y+z=0$.

    (b) Determine una parametrización del arco $C_1\subset C$, definido por los puntos $(x,y,z)\in C$ tales que $x\geq 0$, con punto inicial $A\left(0,-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y con punto final $R\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

63. Demuestre que si $y=f(x)$, con $a\leq x\leq b$, entonces la longitud de arco de la función f es

$$s=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$$

64. Demuestre que si $x=g(y)$, con $c\leq y\leq d$, entonces la longitud de arco de la función f es

$$s=\int_c^d\sqrt{1+[g'(y)]^2}dy.$$

65. Determine la longitud de la gráfica de la ecuación dada en el intervalo indicado

    1. $y=x$, $[-1,1]$
    2. $y=x^{3/2}+4$, desde $(0,4)$ hasta $(1,5)$
    3. $y=2x+1$, $[0,3]$
    4. $y=3x^{2/3}$, $[1,8]$
    5. $y=\displaystyle\int_1^x\sqrt{u^2-1}\,du$, $1\leq x\leq 2$
    6. $y=2\sqrt{x+1}$, $[0,3]$
    7. $y=\displaystyle\int_{\pi/6}^x\sqrt{64\operatorname{sen}^2 u\cos^2 u-1}\,du$, $\dfrac{\pi}{6}\leq x\leq\dfrac{\pi}{3}$
    8. $5x=y^{5/2}+5y^{-1/2}$, $[4,9]$
    9. $x=4-y^{2/3}$, $[1,8]$
    10. $y=x^2$, $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$
    11. $y=e^x$, $[0,1]$

66. Determine la longitud de arco de la curva descrita por $\boldsymbol{\lambda}(t)=\left(t,t,t^2\right)$ con $-3\leq t\leq 3$.

67. Demuestre que la longitud de arco de la función $\boldsymbol{F}(t)=(\cosh t,\operatorname{senh} t,t)$ es $s(t)=\sqrt{2}\operatorname{senh} t$.

68. Calcular la longitud de arco de la curva $\boldsymbol{\lambda}(t)=\left(t^3-3t,3t^2\right)$ con $-\sqrt{3}\leq t\leq\sqrt{3}$.

69. Calcular la longitud de arco de la hélice cónica C de ecuaciones paramétricas dadas por

$$x(t)=ae^t\cos t,\qquad y(t)=ae^t\operatorname{sen} t,\qquad z(t)=ae^t,\qquad a>0,$$

desde el punto $(0,0,0)$ hasta el punto $(a,0,a)$).

70. Determine la longitud de la gráfica de la curva $\boldsymbol{r}$ dada en forma paramétrica por las ecuaciones

$$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t))=(a\cos t,a\operatorname{sen} t),\qquad\qquad t\in[0,2\pi].$$

71. Determine la longitud de la gráfica de la curva $\boldsymbol{r}$ dada en forma paramétrica por las ecuaciones

$$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t))=\left(3t^2+2,2t^3-1\right),\qquad\qquad t\in[1,2].$$

72. Considere la región limitada por $y=x$ y $y=x^2$. Determine la longitud del borde de la región.

73. Determine la longitud de la gráfica de la curva $\boldsymbol{r}$ dada en forma paramétrica por las ecuaciones

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t)) = \left(t, t^2+1\right), \qquad\qquad t \in [0,1].$$

74. Considere la región limitada por $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$. Determine la longitud del borde de la región.

75. Considere la región limitada por $y = |x|$ y $y = 2 - x^2$. Determine la longitud del borde de la región.

76. Hallar el punto en que la recta, imagen del camino $\boldsymbol{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{F}(t) = (t+1, 3t-2, 2t-1)$, está más cerca del origen.

77. Considere el camino regular $\boldsymbol{\lambda} : [-1,1] \to \mathbb{R}^n$. Diga cuáles de las funciones $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ dadas, produce una reparamettrización $\overline{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \circ \varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}^n$ del camino $\boldsymbol{\lambda}$

1. $\varphi(s) = s$ 2. $\varphi(s) = -s$ 3. $\varphi(s) = 2s^2 - 1$ 4. $\varphi(s) = \dfrac{s-1}{2}$ 5. $\varphi(s) = s^3$

78. Sea $\boldsymbol{\lambda} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ el camino $\boldsymbol{\lambda}(t) = \left(t^2+1, t^3+3t+2\right)$. Sea $\varphi : [-1,1] \to [0,1]$ una función de clase C^1, sobreyectiva, tal que $\varphi'(s) > 0$ para todo $x \in [-1,1]$. Si $\varphi(0) = 1/2$, $\varphi'(0) = 2$, obtenga el vector velocidad de la reparametrización $\overline{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \circ \varphi$ para $s = 0$.

79. Sea $\boldsymbol{\lambda} : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ el camino $\boldsymbol{\lambda}(t) = \left(t^3 - 3t, t^2 + 4t\right)$. Determine una función $\varphi : [-2,2] \to [-1,1]$ sobreyectiva, de clase C^1, tal que, $\boldsymbol{\lambda} \circ \varphi : [-2,2] \to \mathbb{R}^2$ sea un camino que comience en el punto $\boldsymbol{\lambda}(-1) = (2,-3)$, vaya al punto $\boldsymbol{\lambda}(1) = (-2,5)$ durante los primeros 2 segundos y regrese finalmente al punto $\boldsymbol{\lambda}(-1)$ durante los siguientes 2 segundos. ¿Es $\overline{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \circ \varphi$ una reparametrización de λ?

80. Sea $\boldsymbol{\lambda} : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ el camino $\boldsymbol{\lambda}(t) = (2\cos t, 3\,\mathrm{sen}\, t)$. Determine una función $\varphi : [-1,1] \to [0,2\pi]$ sobreyectiva, de clase C^1, tal que, $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\lambda} \circ \varphi : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ recorra 2 veces la elipse $\boldsymbol{\lambda}([0,2\pi])$. ¿Es $\boldsymbol{\mu}$ una reparametrización de λ?

81. Sea $\boldsymbol{\lambda} : [0,5] \to \mathbb{R}^3$ el camino $\boldsymbol{\lambda}(t) = (\mathrm{sen}\, t, \cos t, t)$. Obtenga una reparametrización $\overline{\boldsymbol{\lambda}}$ de $\boldsymbol{\lambda}$, que conserve su orientación y recorra la traza de $\boldsymbol{\lambda}$ en la quinta parte del tiempo en que lo hace $\boldsymbol{\lambda}$.

82. Sea $\boldsymbol{\lambda} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ el camino $\boldsymbol{\lambda}(t) = (t,t,t)$. Obtenga una reparametrización $\overline{\boldsymbol{\lambda}}$ de $\boldsymbol{\lambda}$, que invierta su orientación y recorra el segmento de recta $\boldsymbol{\lambda}([0,1])$ en 5 segundos.

83. Para cada uno de los caminos $\boldsymbol{\lambda}$ dados a continuación, obtenga una reparametrización $\overline{\boldsymbol{\lambda}}$ que recorra su imagen de la manera indicada

   (a) $\boldsymbol{\lambda} : [0,2] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\lambda}(t) = \left(3t+2, t^3+3\right)$. Se quiere que $\overline{\boldsymbol{\lambda}}$ recorra $\boldsymbol{\lambda}([0,2])$ en la misma dirección de $\boldsymbol{\lambda}$, pero con el doble de velocidad.

   (b) $\boldsymbol{\lambda} : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\lambda}(t) = (3\cos t, 3\,\mathrm{sen}\, t)$. Se quiere que $\overline{\boldsymbol{\lambda}}$ recorra $\boldsymbol{\lambda}([-1,1])$ en la misma dirección de $\boldsymbol{\lambda}$, pero a la mitad de la velocidad.

   (c) $\boldsymbol{\lambda} : [0,3] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\lambda}(t) = \left(t^2+t, 4t-1\right)$. Se quiere que $\overline{\boldsymbol{\lambda}}$ recorra $\boldsymbol{\lambda}([0,3])$ en dirección contraria a $\boldsymbol{\lambda}$, y que lo haga en la cuarta parte del tiempo que le toma a $\boldsymbol{\lambda}$ recorrerlo.

   (d) $\boldsymbol{\lambda} : [0,3] \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\lambda}(t) = \left(te^t, te^{-t}, t\right)$. Se quiere que $\overline{\boldsymbol{\lambda}}$ recorra $\boldsymbol{\lambda}([0,3])$ en dirección contraria a $\boldsymbol{\lambda}$, y que lo haga en el mismo tiempo del recorrido de $\boldsymbol{\lambda}$.

   (e) $\boldsymbol{\lambda} : [1,4] \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\lambda}(t) = (t, 2t, 3t)$. Se quiere que $\overline{\boldsymbol{\lambda}}$ recorra $\boldsymbol{\lambda}([1,4])$ en la misma dirección de $\boldsymbol{\lambda}$, y que le tome π veces más tiempo en efectuar el recorrido.

84. Considere el camino $\boldsymbol{\lambda} : [0, 2\pi r] \to \mathbb{R}^2$, dado por

$$\boldsymbol{\lambda}(s) = \left(r\cos\left(\frac{s}{r}\right), r\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{r}\right)\right).$$

Este es la reparametrización por longitud de arco del círculo $x^2 + y^2 = r^2$. Calcule $\boldsymbol{\lambda}''(s)$. Compruebe que este vector es ortogonal a $\boldsymbol{\lambda}'(s)$ para todo s en $[0, 2\pi r]$. Interprete geométricamente este hecho. Calcule $\left\|\boldsymbol{\lambda}''(s)\right\|$.

85. Considere el camino $\boldsymbol{\lambda} : [0, \operatorname{senh} 3] \to \mathbb{R}^2$, dado por

$$\boldsymbol{\lambda}(s) = \left(\ln\left(s + \sqrt{s^2+1}\right), \cosh\left(\ln\left(s + \sqrt{s^2+1}\right)\right)\right).$$

Este es la reparametrización por longitud de arco de la catenaria $y = \cosh x$ en el intervalo $[0,3]$. Calcule $\boldsymbol{\lambda}''(s)$. Compruebe que este vector es ortogonal a $\boldsymbol{\lambda}'(s)$, para toda s en $[0, \operatorname{senh} 3]$. Calcule $\left\|\boldsymbol{\lambda}''(s)\right\|$.

86. Considere el camino $\boldsymbol{\lambda} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, dado por

$$\boldsymbol{\lambda}(s) = \left(\alpha \cos\left(\frac{s}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right), \alpha \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right), \frac{\beta s}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right).$$

Este es la reparametrización por longitud de arco de la hélice circular $\boldsymbol{g}(t) = (\alpha \cos t, \alpha \operatorname{sen} t, \beta t)$, $t \in \mathbb{R}$. Calcule $\boldsymbol{\lambda}''(s)$. Compruebe que este vector es ortogonal a $\boldsymbol{\lambda}'(s)$, para toda s en $\mathbb{R}$. Calcule $\left\|\boldsymbol{\lambda}''(s)\right\|$.

87. Sea $\boldsymbol{\lambda} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ un camino diferenciable por longitud de arco. Demuestre que el vector $\boldsymbol{\lambda}''(s)$ es ortogonal al vector $\boldsymbol{\lambda}'(s)$, para todo $s \in I$.

88. Dada la circunferencia $\boldsymbol{\lambda}(t) = (3\cos t, 3 \operatorname{sen} t)$. Obtenga una parametrización en función de la longitud de arco.

89. Obtenga otra representación paramétrica de la curva $\boldsymbol{F}(t) = (\cosh t, \operatorname{senh} t, t)$ usando como parámetro la longitud de arco $s(t)$.

Bibliografía

1. **Marsden, Jerrold E., y Tromba, Anthony J.**: "*Cálculo vectorial*". Quinta edición. Addison-Wesley.

2. **Apostol, Tom**: "*Calculus*". Volumen II. Segunda Edición. Editorial Reverte

3. **Pita Ruiz, Claudio**: "*Cálculo vectorial*". Primera edición. Prentice Hall Hispanoamericana.

4. **Morales Bueno, Jacinto**: "*Problemario: Ejercicios de Cálculo Diferencial y del Cálculo Integral en Varias Variables Reales*". Tercera Edición. U.S.B.

5. **Bradley, Gerald L., y Smith, Karl J.**: "*Cálculo de varias variables*". Volumen 2. Prentice Hall.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Integrales de líneas

Objetivos a cubrir

Código : MAT-CV.6

- Integrales de líneas: Campos escalares y campos vectoriales.
- Campos conservativos. Funciones potenciales. Independencia de caminos.

Ejercicios

1. Calcule las integrales de líneas indicadas

   (a) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\lambda}} dx$, donde $\boldsymbol{\lambda} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\lambda}(t) = (t, 3t,)$.

   (b) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\lambda}} dy$, donde $\boldsymbol{\lambda} : [0,2] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\lambda}(t) = (t, 1,)$.

   (c) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\lambda}} x\ dx + y\ dy$, donde $\boldsymbol{\lambda} : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\lambda}(t) = (t, t)$.

   (d) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\lambda}} y\ dx + x\ dy$, donde $\boldsymbol{\lambda} : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\lambda}(t) = (-t, t)$.

   (e) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\lambda}} xy\ dx - y\ dy$, donde $\boldsymbol{\lambda} : [0,2] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\lambda}(t) = \left(t^2, 2\right)$.

   (f) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\lambda}} (x+y)\, dx + (x-y)$, donde $\boldsymbol{\lambda} : [0,2] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\lambda}(t) = (t, 2t)$.

   (g) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\lambda}} \left(x^2+y^2\right) dx$, donde $\boldsymbol{\lambda} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\lambda}(t) = \left(t, \operatorname{sen}^2 t\right)$.

   (h) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\lambda}} \left(x^2+y^2\right) dx + \left(x^2-y^2\right) dy$, donde $\boldsymbol{\lambda} : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\lambda}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$.

   (i) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\lambda}} xy\ dx + xz\ dy - yz\ dz$, donde $\boldsymbol{\lambda} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\lambda}(t) = \left(t, t^2, t^3\right)$.

   (j) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\lambda}} (x+2y+z)\, dx + 2y\ dy + (3x-z)\, dz$, donde $\boldsymbol{\lambda} : [0,2] \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\lambda}(t) = (t+1, 2t+1, t)$

   (k) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\lambda}} x_1\ dx_1 - x_2\ dx_2 + x_3\ dx_3 - x_4\ dx_4$, donde $\boldsymbol{\lambda} : [0,2] \to \mathbb{R}^4$, $\boldsymbol{\lambda}(t) = (t, 2t, 3t, 4t)$

   (l) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\lambda}} (x_1+x_2)\, dx_1 - (2x_3-x_4)\, dx_2 + 2x_3x_4\ dx_3 - (x_4+x_5)\, dx_4 + x_5\ dx_5$, donde $\boldsymbol{\lambda} : [0,1] \to \mathbb{R}^5$, $\boldsymbol{\lambda}(t) = (t+1, t-1, t+2, t, 3t)$

2. Calcule la integral de linea $\displaystyle\int_C 2xy\ dx - y\ dy$, donde C es una curva que une el punto $P(0,0)$ con el punto $Q(1,1)$ en cada uno de los siguientes casos

   (a) C es un segmento de recta que va de P a Q.
   (b) C es el arco de la parábola $y = x^2$ que va de P a Q.
   (c) C es el arco de la parábola $x = y^2$ que va de P a Q.

 Farith J. Briceño N. farith.math@gmail.com

(d) C va de P al punto $(1,0)$ y de éste a Q (en linea recta).

(e) C va de P al punto $(0,1)$ y de éste a Q (en linea recta).

3. Repita el ejercicio 2 con la integral $\displaystyle\int_C 6xy\ dx + \left(3x^2+2y\right) dy$.

4. Calcule la integral del ejercicio 3 a lo largo

   (a) el círculo $x^2+y^2=r^2$, recorrido en sentido antihorario.

   (b) el cuadrado $|x|+|y|=1$, recorrido en sentido horario.

5. Calcule la integral de linea $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\lambda}} 3xy\ dx + y^2\ dy$, a lo largo de los caminos dados en el ejercicio 4.

6. Calcule la integral de linea $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\lambda}} \left(2xy^3+yz\right) dx + \left(3x^2y^2+xz\right) dy + xy\ dz$, donde $\boldsymbol{\lambda}$ es un camino cuyo punto inicial es $P(0,0,0)$ y cuyo punto final es $Q(1,1,1)$, en cada uno de los siguientes casos

   (a) $\boldsymbol{\lambda}$ es un segmento de recta.

   (b) $\boldsymbol{\lambda} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\lambda}(t) = \left(t, t^2, t^3\right)$.

   (c) $\boldsymbol{\lambda} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\lambda}(t) = \left(t^\alpha, t^\beta, t^\gamma\right)$, donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$.

7. Calcule la integral de linea del ejercicio 6 a lo largo de la curva cerrada que se obtiene al intersectar las esferas $x^2+y^2+z^2=r^2$ y $x^2+y^2+(z-r)^2=r^2$.

8. En cada uno de los siguientes ejercicios, calcular la integral de linea del campo vectorial $\boldsymbol{F}$ a lo largo del camino que se indica

   (a) $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(x^2-2xy\right)\boldsymbol{i} + \left(y^2-2xy\right)\boldsymbol{j}$, a lo largo de la parábola $y=x^2$ desde el punto $(-1,1)$ hasta el punto $(1,1)$.

   (b) $\boldsymbol{F}(x,y) = (2a-y)\,\boldsymbol{i} + x\ \boldsymbol{j}$, a lo largo del camino descrito por $\boldsymbol{\alpha}(t) = a(t-\operatorname{sen} t)\ \boldsymbol{i} + a(1-\cos t)\ \boldsymbol{j}$, con $0 \leq t \leq 2\pi$.

   (c) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(y^2-x^2\right)\boldsymbol{i} + 2yz\ \boldsymbol{j} - x^2\ \boldsymbol{j}$, a lo largo del camino descrito por $\boldsymbol{\alpha}(t) = t\ \boldsymbol{i} + t^2\ \boldsymbol{j} + t^3\ \boldsymbol{k}$, con $0 \leq t \leq 1$.

   (d) $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(x^2+y^2\right)\boldsymbol{i} + \left(x^2-y^2\right)\boldsymbol{j}$, a lo largo de la curva $y = 1-|1-x|$, desde $(0,0)$ a $(2,0)$.

   (e) $\boldsymbol{F}(x,y) = (x+y)\,\boldsymbol{i} + (x-y)\,\boldsymbol{j}$, alrededor de la elipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ en sentido contrario al de las agujas del reloj.

   (f) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = 2xy\ \boldsymbol{i} + \left(x^2+z\right)\boldsymbol{j} + y\ \boldsymbol{k}$, desde $(1,0,2)$ a $(3,4,1)$ a lo largo de un segmento de recta.

   (g) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = x\ \boldsymbol{i} + y\ \boldsymbol{j} + (xz-y)\,\boldsymbol{k}$, desde $(0,0,0)$ a $(1,2,4)$ a lo largo de un segmento rectilíneo.

   (h) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = x\ \boldsymbol{i} + y\ \boldsymbol{j} + (xz-y)\,\boldsymbol{k}$, a lo largo del camino dado por $\boldsymbol{\alpha}(t) = t^2\ \boldsymbol{i} + 2t\ \boldsymbol{j} + 4t^3\ \boldsymbol{k}$ con $0 \leq t \leq 1$.

9. En cada uno de los siguientes ejercicios, calcular el valor de la integral de linea dada

   (a) $\displaystyle\int_C \left(x^2-2xy\right)\ dx + \left(y^2-2xy\right)\ dy$, siendo C el arco de parábola $y=x^2$ que une los puntos $(-2,4)$ y $(1,1)$.

   (b) $\displaystyle\int_C \frac{(x+t)\ dx - (x-y)\ dy}{x^2+y^2}$, donde C es la circunferencia $x^2+y^2=a^2$ recorrida en sentido contrario al de las agujas del reloj.

   (c) $\displaystyle\int_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, donde C es el contorno del cuadrado de vértices $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ y $(0,-1)$, recorrido en sentido contrario al de las agujas del reloj.

(d) $\displaystyle\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, donde

i. C es la curva de intersección de las dos superficies $x+y=2$ y $x^2+y^2+z^2=2(x+y)$. La curva es recorrida de tal modo que mirando desde el origen el sentido es el de las agujas del reloj.

ii. C es la intersección de las dos superficies $z=xy$ y $x^2+y^2=1$, recorrida en sentido, que visto desde encima del plano xy, es el contrario al de las agujas del reloj.

10. En cada uno de los siguientes ejercicios está definido un campo vectorial $\boldsymbol{F}$ por las fórmulas que se dan. En cada caso determinar si $\boldsymbol{F}$ es o no el gradiente de un campo escalar. Cuando $\boldsymbol{F}$ sea un campo gradiente, hallar la correspondiente función potencial φ.

(a) $\boldsymbol{F}(x,y) = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j}$.

(b) $\boldsymbol{F}(x,y) = 3x^2y\,\boldsymbol{i} + x^3\,\boldsymbol{j}$.

(c) $\boldsymbol{F}(x,y) = (2xe^y + y)\,\boldsymbol{i} + \left(x^2e^y + x - 2y\right)\boldsymbol{j}$.

(d) $\boldsymbol{F}(x,y) = (\operatorname{sen} y - y\operatorname{sen} x + x)\,\boldsymbol{i} + (\cos x + x\cos y + y)\,\boldsymbol{j}$.

(e) $\boldsymbol{F}(x,y) = (\operatorname{sen}(xy) + xy\cos(xy))\,\boldsymbol{i} + x^2\cos(xy)\,\boldsymbol{j}$.

(f) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}$.

(g) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x+z)\,\boldsymbol{i} - (y+z)\,\boldsymbol{j} + (x-y)\,\boldsymbol{k}$.

(h) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = 2xy^3\,\boldsymbol{i} + x^2z^3\,\boldsymbol{j} + 3x^2yz^2\,\boldsymbol{k}$.

(i) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = 3y^4z^2\,\boldsymbol{i} + 4x^3z^2\,\boldsymbol{j} - 3x^2y^2\,\boldsymbol{k}$.

(j) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(2x^2 + 8xy^2\right)\boldsymbol{i} + \left(3x^3y - 3xy\right)\boldsymbol{j} - \left(4y^2z^2 + 2x^3z\right)\boldsymbol{k}$.

(k) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(y^2\cos x + z^3\right)\boldsymbol{i} - (4 - 2y\operatorname{sen} x)\,\boldsymbol{j} + \left(3xz^2 + 2\right)\boldsymbol{k}$.

(l) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(4xy - 3x^2z^2 + 1\right)\boldsymbol{i} + 2\left(x^2+1\right)\boldsymbol{j} - \left(2x^3z + 3z^2\right)\boldsymbol{k}$.

11. ¿Cuál es el valor de la integral de un campo gradiente alrededor de una curva cerrada C?

12. Para los campos $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dados

1. $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(2xy+1, x^2+4y\right)$
2. $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(3y^3+y+2, 9xy^2+x\right)$
3. $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(2xy^2+y+5, 2x^2y+x+2\right)$
4. $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(2xy^3+y+1, 3x^2y^2+x+7\right)$
5. $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(4x+\operatorname{sen}^2 y, x\operatorname{sen} 2y+1\right)$
6. $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(15x^4+6x^2y^3+y, 6x^3y^2+x+15y^4\right)$
7. $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(y^2e^{x+y}+1, ye^{x+y}(y+2)+1\right)$
8. $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(3x^2+2xy^2+y, 2x^2y+x+3y^2\right)$
9. $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(e^x\operatorname{sen} y+1, e^x\cos y+1\right)$
10. $\boldsymbol{F}(x,y) = (y\cos x+\operatorname{sen} y+1, \operatorname{sen} x+x\cos y+1)$

(a) Demuestre que es un campo conservativo.

(b) Calcule la integral de linea de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de *alguna* curva que una al origen de coordenadas con el punto $(1,1)$.

(c) Determine una función potencial del campo $\boldsymbol{F}$.

13. Demuestre que cada uno de los campos $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dados a continuación no es un campo conservativo

(a) Calculando la integral de linea a lo largo del círculo $x^2+y^2=1$.

(b) Usando el Teorema sobre campo conservativo

1. $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(xy, y^2\right)$
2. $\boldsymbol{F}(x,y) = (x+4y, x-5y)$
3. $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(x^2+y^2, xy\right)$
4. $\boldsymbol{F}(x,y) = (3xy, xy)$
5. $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(x^2, xy^2\right)$

14. Para cada uno de los campos $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dados

(a) Demuestre que es un campo conservativo.

(b) Calcule la integral de linea de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de *alguna* curva que una al origen de coordenadas con el punto $(1,1,1)$.

(c) Determine una función potencial del campo $\boldsymbol{F}$.

1. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (\pi, e, e^{\pi})$
2. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(2xy^3z, 3x^2y^2z, x^2y^3\right)$
3. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(e^{y+2z}, xe^{y+2z}, 2xe^{y+2z}\right)$
4. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(3y+2z^2, 3x, 4xz\right)$
5. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(z^2+1, 2z, 2xz+2y\right)$.

15. Calcular la integral de linea del campo $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(e^{xz}\left(xyz^2+yz\right), xze^{xz}, e^{xz}\left(x^2yz+xy\right)\right)$$

a lo largo del camino $\boldsymbol{\lambda} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$.

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \left(\frac{\operatorname{senh} 5t^4}{\operatorname{senh} 5}, t^4+5t^3-3t^2-2t, \frac{1}{\ln 7}\ln\left(1+6t^8\right)\right)$$

y a lo largo del camino $\boldsymbol{\mu} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \left(\ln\left(t^2-t+1\right), \operatorname{sen}\left(t^3+3t^2-4t\right), \frac{\cosh\left(t^5-t\right)-1}{\left(t^2+t+1\right)^{4/7}}\right)$$

16. Demuestre que el campo $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, dado por

$$\boldsymbol{F}(x,y,z,u) = \left(4uxy+3yz, 2ux^2+3xz, 3xy+3u^2z^2, 2x^2y+2uz^3\right)$$

es conservativo. Calcule la integral de linea de este campo a lo largo de alguna curva que una al punto $(0,1,0,1)$ con el punto $(1,0,1,0)$. Determine una función potencial de este campo.

17. Demuestre que si los campos $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definidos en un conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ son conservativos, entonces el campo $\boldsymbol{F}+\alpha\boldsymbol{G} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(\boldsymbol{F}+\alpha\boldsymbol{G})(x) = \boldsymbol{F}(x)+\alpha\boldsymbol{G}(x)$, con $\alpha \in \mathbb{R}^n$ y $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, es conservativo.

18. Sean $\varphi, \phi : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones de clase C^1 definidas en el intervalo abierto I de $\mathbb{R}$. Demuestre que

$$\oint_{\lambda} \varphi(x)\ dx + \phi(y)\ dy = 0,$$

donde, $\boldsymbol{\lambda} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ es cualquier camino cerrado cuya imagen está contenida en I.

19. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 definidas en $\mathbb{R}$. Demuestre que

$$\oint_{\boldsymbol{\lambda}} f\left(x^2+y^2\right)(x\ dx + y\ dy) = 0,$$

donde, $\boldsymbol{\lambda} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ es cualquier camino cerrado. Más general, demuestre que la integral de linea del campo $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, cuya $i-$ésima función coordenada es $F_i : \mathbb{R}^b \to \mathbb{R}$, $F_i(x) = x_i f(\|x\|)$, $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, a lo largo de cualquier camino cerrado en $\mathbb{R}^n$, es igual a cero.

20. Demostrar que $\boldsymbol{F}(x,y) = y\cos x\ \boldsymbol{i} + x \operatorname{sen} y\ \boldsymbol{j}$ no es un campo vectorial gradiente.

21. Demostrar que $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(x^2+y^2\right)\ \boldsymbol{i} - 2xy\ \boldsymbol{j}$ no es un campo vectorial gradiente.

22. Sea $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(z^3+2xy\right)\boldsymbol{i} + x^2\ \boldsymbol{j} + 3xz^2\ \boldsymbol{k}$. Mostrar que la integral de $\boldsymbol{F}$ alrededor del contorno del cuadrado con vértices $(\pm 1, \pm 1)$ es cero.

23. Evaluar $\displaystyle\int_C 2xyz\ dx + x^2z\ dy + x^2y\ dz$, donde C es una curva simple orientada que conecta $(1,1,1)$ con $(1,2,4)$.

24. Suponer que $\nabla f(x,y,z) = 2xyze^{x^2}\,\boldsymbol{i} + ze^{x^2}\,\boldsymbol{j} + ye^{x^2}\,\boldsymbol{k}$. Si $f(0,0,0)=5$, hallar $f(1,1,2)$.

25. Calcule la integral de linea con respecto a la longitud de arco indicada

   (a) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\lambda}} x\,ds$, donde $\boldsymbol{\lambda}:[0,2]\to\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\lambda}(t)=(t,t)$.

   (b) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\lambda}} (x+3y)\,ds$, donde $\boldsymbol{\lambda}:[-1,1]\to\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\lambda}(t)=(t-3,3t+2)$.

   (c) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\lambda}} \left(x^2-2xy\right)ds$, donde $\boldsymbol{\lambda}:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\lambda}(t)=(-\operatorname{sen} t,\cos t)$

   (d) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\lambda}} xy\,ds$, donde $\boldsymbol{\lambda}:[0,\pi]\to\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\lambda}(t)=(3\cos t,4\operatorname{sen} t)$

   (e) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\lambda}} \left(x^2+y^3\right)ds$, donde $\boldsymbol{\lambda}:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\lambda}(t)=(\operatorname{sen} t,\cos t)$

   (f) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\lambda}} (x+y)\,ds$, donde $\boldsymbol{\lambda}:[-1,1]\to\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\lambda}(t)=\left(t-1,t^2\right)$

   (g) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\lambda}} y^2\,ds$, donde $\boldsymbol{\lambda}:[0,2]\to\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\lambda}(t)=(t,\cosh t)$

   (h) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\lambda}} (x-y+3z)\,ds$, donde $\boldsymbol{\lambda}:[0,2]\to\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\lambda}(t)=(t+1,t,4t)$

   (i) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\lambda}} \frac{z}{x^2+y^2}\,ds$, donde $\boldsymbol{\lambda}:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\lambda}(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t,t)$

   (j) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\lambda}} \left(3z+x^2+y^2\right)ds$, donde $\boldsymbol{\lambda}:[0,\pi]\to\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\lambda}(t)=(t\cos t,t\operatorname{sen} t,t)$

   (k) $\displaystyle\int_C (x+y)\,ds$, siendo C el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$, recorrido en sentido contrario al de las agujas del reloj.

   (l) $\displaystyle\int_C y^2\,ds$, donde C tiene la ecuación vectorial

   $$\boldsymbol{\lambda}(t)=a(t-\operatorname{sen} t)\,\boldsymbol{i}+a(1-\cos t)\,\boldsymbol{j} \qquad 0\le t\le 2\pi.$$

   (m) $\displaystyle\int_C \left(x^2+y^2\right)\,ds$, donde C tiene la ecuación vectorial

   $$\boldsymbol{\lambda}(t)=a(\cos t+t\operatorname{sen} t)\,\boldsymbol{i}+a(\operatorname{sen} t-t\cos t)\,\boldsymbol{j} \qquad 0\le t\le 2\pi.$$

   (n) $\displaystyle\int_C z\,ds$, donde C tiene la ecuación vectorial

   $$\boldsymbol{\lambda}(t)=t\cos t\;\boldsymbol{i}+t\operatorname{sen} t\;\boldsymbol{j}+t\;\boldsymbol{k} \qquad 0\le t\le 2\pi.$$

26. Suponga que la integral de linea con respecto a la longitud de arco de la función $f:U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, a lo largo del camino $\boldsymbol{\lambda}:[0,1]\to\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\lambda}([0,1])\subset U$, es igual a k. Determine

   (a) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\mu}} f\,ds$, donde, $\boldsymbol{\mu}:[0,1]\to\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\mu}(t)=\boldsymbol{\lambda}(1-t)$.

(b) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\mu}} f\ ds,$ donde, $\boldsymbol{\mu}:\left[0,\frac{1}{2}\right]\to\mathbb{R}^n,$ $\boldsymbol{\mu}(t)=\boldsymbol{\lambda}(2t).$

(c) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\mu}} f\ ds,$ donde, $\boldsymbol{\mu}:[0,1]\to\mathbb{R}^n,$ $\boldsymbol{\mu}(t)=\boldsymbol{\lambda}\left(t^2\right).$

(d) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\mu}} f\ ds,$ donde, $\boldsymbol{\mu}:[0,1]\to\mathbb{R}^n,$ $\boldsymbol{\mu}(t)=\boldsymbol{\lambda}\left(\sqrt{t}\right).$

(e) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\mu}} f\ ds,$ donde, $\boldsymbol{\mu}:[0,\pi]\to\mathbb{R}^n,$ $\boldsymbol{\mu}(t)=\boldsymbol{\lambda}(\operatorname{sen} t).$

(f) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\mu}} f\ ds,$ donde, $\boldsymbol{\mu}:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^n,$ $\boldsymbol{\mu}(t)=\boldsymbol{\lambda}(|\operatorname{sen} t|).$

(g) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\mu}} f\ ds,$ donde, $\boldsymbol{\mu}:[-1,1]\to\mathbb{R}^n,$ $\boldsymbol{\mu}(t)=\boldsymbol{\lambda}\left(1-t^2\right).$

27. Suponga que $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\lambda}} f\ ds=k_1$ y $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\lambda}} g\ ds=k_2,$ donde $\boldsymbol{\lambda}:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ es un camino cuya imagen está contenida en el conjunto abierto $U\subseteq\mathbb{R}^n,$ dominio de las funciones f y g. Determine

(a) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\mu}} (f+g)\ ds,$ donde, $\boldsymbol{\mu}:[0,1]\to\mathbb{R}^n,$ $\boldsymbol{\mu}(t)=\boldsymbol{\lambda}(1-t)$

(b) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\mu}} (3f-g)\ ds,$ donde, $\boldsymbol{\mu}:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^n,$ $\boldsymbol{\mu}(t)=\boldsymbol{\lambda}(|\cos t|)$

(c) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\mu}} (f-3g)\ ds,$ donde, $\boldsymbol{\mu}:[-2\pi,2\pi]\to\mathbb{R}^n,$ $\boldsymbol{\mu}(t)=\boldsymbol{\lambda}(|\operatorname{sen} t|)$

28. Halla la masa total de un alambre cuya forma es la de la curva $y=\ln x,$ comprendida entre $x_1=1$ y $x_2=e,$ si la densidad en cada punto P de él es igual al cuadrado de la abscisa del punto.

29. Halle la masa total de un alambre "en v", cuya forma es de la de la curva $y=|x|,$ comprendida entre $x_1=-1$ y $x_2=1,$ si la densidad en cada punto de él es igual al valor absoluto del producto de las coordenadas del punto.

30. Halle las coordenadas del centro de masa del alambre homogéneo cuya forma es la de la curva dada

(a) El cuadrado $|x|+|y|=1.$

(b) La mitad del cuadrado del ejercicio 30a, correspondiente a $y\geq 0.$

(c) La porción de la catenaria $y=\cosh x,$ correspondiente a $-1\leq x\leq 1.$

(d) Los lados del triángulo isósceles, con vértices en $A(0,0),$ $B(2,0)$ y $C(1,h).$

31. Calcule el valor medio de la función $f(x,y)=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$ sobre el camino $\boldsymbol{\lambda}:[-\alpha,\alpha]\to\mathbb{R}^2,$ $\boldsymbol{\lambda}(t)=(t,mt),$ donde $\alpha=\dfrac{r}{\sqrt{1+m^2}}$ y m es un número real dado.

32. Suponga que la curva, imagen del camino $\boldsymbol{\lambda}:[a,b]\to\mathbb{R}^n,$ de clase C^1 es una curva de nivel de la función continua $f:U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}.$ ¿Cuál es el valor medio de la función f sobre $\boldsymbol{\lambda}$?

33. Calcular el área del cilindro $x^2+y^2=r^2$ que se encuentra dentro de la esfera $x^2+y^2+z^2=R^2,$ $(r<R)$

34. Calcular el área del cilindro $x^2+y^2=ax$ que se encuentra dentro de la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2.$

35. Calcular el área del cilindro $x^2+y^2=ax$ que se encuentra por encima del plano $z=0$ y por debajo de:

$a.\quad z=\sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad\qquad$ $b.\quad z=x^2+y^2$

36. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva. Sea a un número del rango de f. Suponga que la curva de nivel a de f es una curva cerrada simple C, cuya longitud es L. ¿Cuál es el área del cilindro recto que se encuentra por debajo de la superficie $z = f(x, y)$ y por encima del plano $z = 0$, al cual corta en la curva C?

37. Calcular el trabajo que se necesita para llevar un punto material de $(1, 0)$ a $(-1, 0)$, por el círculo $x^2 + y^2 = 1$, a través de un campo de fuerzas en el que en cada punto del plano actúa una fuerza constante de magnitud igual a 2, apuntando en la dirección positiva del eje y.

38. Repetir el ejercicio 37 si el punto se lleva por la curva $y = 1 - |x|$.

39. En cada punto del plano actúa una fuerza de magnitud constante igual a 2, la cual forma siempre proyecciones iguales con los ejes coordenados. Calcular el trabajo necesario para desplazar un punto material a través de este campo de fuerzas, del punto $P(0, 0)$ al punto $Q(2, 2)$ en cada uno de los siguientes casos:

    (a) va por el segmento de recta que une P con Q.
    (b) siguiendo la trayectoria (de segmentos de recta): $P(0, 0) \to (1, 0) \to (1, 1) \to (2, 1) \to Q(2, 2)$.
    (c) va por la parábola $y = \dfrac{x^2}{2}$.

40. Considere el campo de fuerzas $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{F}(x, y) = (x + y, x - y)$. Calcule el trabajo que se necesita para trasladar un punto material a través de este campo desde el origen de coordenadas hasta el punto $(2, 0)$ en cada uno de los siguientes casos

    (a) va directamente sobre el eje x.
    (b) siguiendo la trayectoria del semicírculo $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$.
    (c) siguiendo la trayectoria del semicírculo $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, $y \leq 0$.

41. Considere el campo de fuerzas $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Calcule el trabajo que se necesita para trasladar un punto material a través de este campo desde el origen de coordenadas hasta el punto $(1, 1, 1)$ en cada uno de los siguientes casos

    (a) va directamente por un segmento de recta.
    (b) siguiendo la trayectoria de segmento de recta

    $$(0, 0, 0) \to (1, 0, 0) \to (1, 1, 0) \to (1, 1, 1)$$

42. Un cuerpo de masa $m = 1$ gr se mueve a través de un campo de fuerzas siguiendo el camino $\boldsymbol{\lambda} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$. Suponga que $\boldsymbol{\lambda}'(a) = (1, 2, 1)$ y $\boldsymbol{\lambda}'(b) = 1, 3, 2$. Calcule el trabajo que se realiza para llevar el cuerpo se $p = \boldsymbol{\lambda}(a)$ a $q = \boldsymbol{\lambda}(b)$.

43. Un campo de fuerza $\boldsymbol{F}$ del espacio de tres dimensiones viene dado por $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x\ \boldsymbol{i} + y\ \boldsymbol{j} + (xz - y)\ \boldsymbol{k}$. Calcular el trabajo realizado por esa fuerza al mover una partícula desde $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, 4)$ a lo largo del segmento de recta que une esos puntos.

44. Hallar el trabajo realizado por la fuerza $\boldsymbol{F}(x, y) = \left(x^2 - y^2\right)\ \boldsymbol{i} + 2xy\ \boldsymbol{j}$ al mover una partícula en sentido contrario al de las agujas del reloj recorriendo una vez el contorno del cuadrado limitado por los ejes coordenados y las rectas $x = a$ e $y = a$, $a > 0$.

45. Un campo de fuerzas bidimensional $\boldsymbol{F}$ viene dado por la ecuación $\boldsymbol{F}(x, y) = cxy\ \boldsymbol{i} + x^4 y^2\ \boldsymbol{j}$, siendo c una constante positiva. Esta fuerza actúa sobre una partícula que se mueve desde $(0, 0)$ hasta la recta $x = 1$ siguiendo una curva de la forma

    $$y = ax^b, \qquad \text{donde} \qquad a > 0 \qquad \text{y} \qquad b > 0.$$

    Encontrar el valor de a (en función de c) tal que el trabajo realizado por esa fuerza sea independiente de b.

46. Un campo de fuerza $\boldsymbol{F}$ en el espacio de tres dimensiones viene dado por la fórmula $\boldsymbol{F}(x, y, z) = yz\ \boldsymbol{i} + xz\ \boldsymbol{j} + x(y + 1)\ \boldsymbol{k}$. Calcular el trabajo realizado por $\boldsymbol{F}$ al mover una partícula recorriendo una vez el contorno del triángulo de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(-1, 1, -1)$ en ese orden.

47. Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(y-z)\ \boldsymbol{i}+(z-x)\ \boldsymbol{j}+(x-y)\ \boldsymbol{k}$ a lo largo de la curva intersección de le esfera $x^2+y^2+z^2=4$ y el plano $z=y\tan\theta$, donde $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$. El camino es recorrido de modo que, observado el plano xy desde el eje z positivo, el sentido aparezca contrario al de las agujas del reloj.

48. Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\boldsymbol{F}(x,y,z)=y^2\ \boldsymbol{i}+z^2\ \boldsymbol{j}+x^2\ \boldsymbol{k}$ a lo largo de la curva de intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ y al cilindro $x^2+y^2=ax$, siendo $z\geq 0$ y $a>0$. El camino es recorrido de modo que, observado el plano xy desde el eje z positivo, el sentido aparezca contrario al de las agujas del reloj.

49. Considere la fuerza $\boldsymbol{F}(x,y,z)=x\ \boldsymbol{i}+y\ \boldsymbol{j}+z\ \boldsymbol{k}$. Calcular el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la parábola $y=x^2$, $z=0$, de $x=-1$ a $x=2$.

50. Un campo de fuerzas $\boldsymbol{F}$ está definido en el espacio de tres dimensiones por la ecuación

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=y\ \boldsymbol{i}+z\ \boldsymbol{j}+yz\ \boldsymbol{k}$$

(a) Determinar si $\boldsymbol{F}$ es o no conservativo.

(b) Calcular el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la curva de ecuación

$$\boldsymbol{\lambda}(t)=\cos t\ \boldsymbol{i}+\operatorname{sen} t\ \boldsymbol{j}+e^t\ \boldsymbol{k}$$

cuando t varía de 0 a π.

51. Un campo de fuerza bidimensional $\boldsymbol{F}$ tiene por ecuación

$$\boldsymbol{F}(x,y)=(x+y)\,\boldsymbol{i}+(x-y)\,\boldsymbol{j}$$

(a) Demostrar que el trabajo realizado por esa fuerza al mover una partícula siguiendo la curva

$$\boldsymbol{\lambda}(t)=f(t)\ \boldsymbol{i}+g(t)\ \boldsymbol{j}, \qquad a\leq t\leq b,$$

depende únicamente de $f(a)$, $f(b)$, $g(a)$ y $g(b)$.

(b) Hallar el trabajo realizado cuando $f(a)=1$, $f(b)=2$, $g(a)=3$ y $g(b)=4$.

52. Un campo de fuerza radial o "central" $\boldsymbol{F}$ en el plano puede expresarse en la forma $\boldsymbol{F}(x,y)=f(r)\,\boldsymbol{r}$, donde $\boldsymbol{r}=x\ \boldsymbol{i}+y\ \boldsymbol{j}$ y $r=\|\boldsymbol{r}\|$. Demostrar que un tal campo de fuerza es conservativo.

53. Hallar el trabajo realizado por la fuerza $\boldsymbol{F}(x,y)=\left(3y^2+2\right)\boldsymbol{i}+16x\,\boldsymbol{j}$ al mover una partícula desde $(-1,0)$ a $(1,0)$ siguiendo la mitad superior de la elipse $b^2x^2+y^2=b^2$, ¿Qué elipse (es decir, que valor de b) hace mínimo el trabajo?

54. Evaluar $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\lambda}$, donde $\boldsymbol{F}(x,y,z)=y\ \boldsymbol{i}+2x\ \boldsymbol{j}+y\ \boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{\lambda}(t)=t\ \boldsymbol{i}+t^2\ \boldsymbol{j}+t^3\ \boldsymbol{k}$, con $0\leq t\leq 1$.

55. Evaluar $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\lambda}}y\ dx+\left(3y^3-x\right)dy+z\ dz$, para cada una de las trayectorias $\boldsymbol{\lambda}(t)=(t,t^n,0)$, con $0\leq t\leq 1$, donde $n=1,2,3,\ldots$

56. Verifique la ley de la conservación de la energía con un cuerpo de masa $m=1$ gr moviéndose a través del campo de fuerzas $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{F}(x,y)=(y,x)$, por el camino $\boldsymbol{\lambda}:[0,1]\to\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\lambda}(t)=\left(t,t^3\right)$. Es decir, una vez comprobado que el campo $\boldsymbol{F}$ es conservativo, compruebe que la suma de la energía cinética más la energía potencial en el punto $p=\boldsymbol{\lambda}(a)$ es igual a la suma de la energía cinética más la energía potencial en el punto $q=\boldsymbol{\lambda}(b)$.

57. Repita el ejercicio 56 con un cuerpo de masa $m=1$ gr, el campo de fuerzas $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$,

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\left(3y^2z+ye^x,6xyz+e^x,3xy^2\right)$$

y el camino $\boldsymbol{\lambda}:[0,1]\to\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\lambda}(t)=(t,t,t)$.

58. Calcule

$$\int_C x^2 z \; dx + xy \; dy + x \; dz$$

donde C es

(a) el segmento de recta desde el punto $(1,0,0)$ hasta el punto $(1,0,3)$.

(b) la hélice enrollada sobre la superficie cilindrica de ecuación $x^2+y^2=1$ desde el punto $(1,0,0)$ hasta el punto $(1,0,3)$.

59. Calcule el valor de las siguientes integrales de linea

(a) $\displaystyle\int_C (x+y)\, ds$, donde C es la frontera del triángulo de értices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$.

(b) $\displaystyle\int_C e^{\sqrt{z}} \; ds$, donde C está definida por el camino $\boldsymbol{\lambda}(t) = \left(1,2,t^2\right)$ con $t\in[0,1]$.

(c) $\displaystyle\int_C \frac{ds}{x^2+y^2+z^2}$, donde C es la primera espiral de la hélice de ecuación

$$x(t) = a\cos t, \qquad y(t) = a \operatorname{sen} t, \qquad z(t) = bt$$

60. Sea $\boldsymbol{F}(x,y) = -\left(xy + x^2\right)\boldsymbol{i} - x^2 y \; \boldsymbol{j}$. Para cada número real a considere la curva C_a definida como el gráfico de la función

$$y = (x-1)(ax-1), \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

Determinar la curva C_a de manera que el trabajo realizado por $\boldsymbol{F}$ a lo largo de C_a, desde el punto $(0,1)$ al punto $(1,0)$ sea mínimo.

61. Calcule la circulación del campo $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(ye^{xy}, xe^{xy}, xyz\right)$ a lo largo de la curva C, situada en el primer octante y que se obtiene como intersección de la superficie $x^2+y^2 = (z-1)^2$ con los planos coordenados. El sentido de recorrido de C es antihorario cuando la miramos desde "encima"del plano xy.

62. Calcular la circulación del campo $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (xy, yz, xz)$ a lo largo de la curva intersección de las superficies $x^2+y^2=1$ y $x+y+z+1$ la cual es recorrida en el sentido correspondiente de su proyección sobre el plano xy, que lo es en sentido antihorario.

63. (a) Determine una parametrización de la curva C que es intersección de la superficie del elipsoide $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3} + z^2 = 1$ y el plano de ecuación $x+y+z=0$.

(b) Determine una parametrización del arco $C_1 \subset C$, definido por los puntos $(x,y,z)\in C$ tales que $x \geq 0$, con punto inicial $A\left(0, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y con punto final $R\left(0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(c) Calcule $\displaystyle\int_{C_1} (x+y)\, dx + (4z+x)\, dy + (y+z)\, dz$.

64. Sea C la curva de origen el punto $(a,0,0)$ que se obtiene como intersección de las superficies $x+z=a$, $x^2+y^2+z^2=a^2$, $a>0$ es una constante. Calcule la integral de linea

$$\int_C y \; dx + z \; dy + x \; dz$$

donde el sentido de recorrido de C es tal que la coordenada y crece.

65. Calcule $\displaystyle\int_C yz \; dx + xz \; dy + x^2y^2 \; dz$, donde C es la intersección de la superficie esférica $x^2+y^2+z^2=9$ con el plano de ecuación $z=2$. La curva C se recorre una vez en sentido antihorario cuando la miramos desde encima del plano dado.

1. **Marsden, Jerrold E., y Tromba, Anthony J.**: "*Cálculo vectorial*". Quinta edición. Addison-Wesley.
2. **Apostol, Tom**: "*Calculus*". Volumen II. Segunda Edición. Editorial Reverte
3. **Pita Ruiz, Claudio**: "*Cálculo vectorial*". Primera edición. Prentice Hall Hispanoamericana.
4. **Morales Bueno, Jacinto**: "*Problemario: Ejercicios de Cálculo Diferencial y del Cálculo Integral en Varias Variables Reales*". Tercera Edición. U.S.B.
5. **Bradley, Gerald L., y Smith, Karl J.**: "*Cálculo de varias variables*". Volumen 2. Prentice Hall.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Integrales dobles

Objetivos a cubrir

Código : MAT-CV.7

- Integrales dobles. Cambio de coordenadas.
- Calculo de área y volumen usando integrales dobles.

Ejercicios

1. Encuentre **a)** $\displaystyle\int_0^2 f(x,y)\ dy$ y **b)** $\displaystyle\int_0^1 f(x,y)\ dx$

   1. $f(x,y)=x^2y^3$ 2. $f(x,y)=2xy-3x^2$ 3. $f(x,y)=xe^{x+y}$ 4. $f(x,y)=\dfrac{x}{y^2+1}$

2. Calcule las siguientes integrales

   1. $\displaystyle\int_0^4\int_0^2 x\sqrt{y}\ dxdy$ 2. $\displaystyle\int_0^2\int_0^3 e^{x-y}\ dydx$ 3. $\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^1 \left(x^3y^3+3xy^2\right)\ dydx$

   4. $\displaystyle\int_0^1\int_1^2 \left(x^4-y^2\right)\ dxdy$ 5. $\displaystyle\int_0^3\int_0^1 \sqrt{x+y}\ dxdy$ 6. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x+y)\ dydx$

   7. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^3 \operatorname{sen} x\ dydx$ 8. $\displaystyle\int_1^2\int_0^1 (x+y)^{-2}\ dxdy$ 9. $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\int_0^{\ln 5} e^{2x-y}\ dxdy$

   10. $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{xy\ dydx}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$ 11. $\displaystyle\int_2^3\int_{-1}^0 \left(xy^2+\frac{y}{x}\right)\ dydx$ 12. $\displaystyle\int_1^2\int_0^3 \left(2y^2-3xy^3\right)\ dydx$

3. Calcular la integral doble de la función $z=f(x,y)$ dada en el rectángulo indicado

   1. $f(x,y)=3;\quad R=[1,3]\times[2,3]$ 2. $f(x,y)=x;\quad R=[-2,0]\times[2,4]$
   3. $f(x,y)=y;\quad R=[2,4]\times[-2,0]$ 4. $f(x,y)=2xy;\quad R=[-1,0]\times[0,1]$
   5. $f(x,y)=(x+2y)^2;\quad R=[-1,5]\times[3,7]$ 6. $f(x,y)=\operatorname{sen}(x+4y);\quad R=[2,5]\times[3,6]$
   7. $f(x,y)=e^{xy};\quad R=[1,2]\times[0,3]$ 8. $f(x,y)=x\cos(2x-y);\quad R=[1,2]\times[3,4]$
   9. $f(x,y)=e^x\operatorname{sen} y;\quad R=[0,1]\times[0,1]$ 10. $f(x,y)=\dfrac{1}{(2x-y-3)^3};\quad R=[2,3]\times[2,3]$
   11. $f(x,y)=x^2ye^{xy};\quad R=[0,1]\times[0,1]$

4. Calcule la integral doble indicada

   (a) $\displaystyle\int\int_R x\operatorname{sen} y\ dA,$ donde $R=\left\{(x,y):1\le x\le 4,\ \ 0\le y\le\frac{\pi}{6}\right\}.$

   (b) $\displaystyle\int\int_R \frac{1+x}{1+y}\ dA,$ donde $R=\{(x,y):-1\le x\le 2,\ \ 0\le y\le 1\}.$

   (c) $\displaystyle\int\int_R x\operatorname{sen}(x+y)\ dA,$ donde $R=\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{3}\right].$

 Farith J. Briceño N. farith.math@gmail.com

(d) $\displaystyle\int\int_R xe^{xy}\ dA$, donde $R=[0,1]\times[0,1]$.

(e) $\displaystyle\int\int_R \frac{1}{x+y}\ dA$, donde $R=[1,2]\times[0,1]$.

(f) $\displaystyle\int\int_R xye^{xy^2}\ dA$, donde $R=[0,1]\times[0,1]$.

5. En los siguientes ejercicios se da una región en el plano. Escriba los límites de las integrales iteradas con los que se calcula la integral doble
$$\int\int_R f(x,y)\ dA,$$
donde $f(x,y)$ es una función continua en la región R.

(a) R es la región triangular limitada por los ejes coordenados y la recta $y=4-3x$.

(b) R es la región triangular limitada por el eje x, la recta $x=4$ y la recta $y=4x$.

(c) R es la región limitada por el triángulo cuyos vértices son $A(1,1)$, $B(5,1)$ y $C(5,6)$.

(d) R es la región limitada por el triángulo cuyos vértices son $A(2,3)$, $B(6,3)$ y $C(4,6)$.

(e) $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x^2+2y^2\leq 1\right\}$.

(f) $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x^2\leq y\leq x+2\right\}$.

(g) $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ y^2-1\leq x\leq 1-y^2\right\}$.

(h) $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ y^2+2\leq x\leq y+3\right\}$.

6. En los siguientes ejercicios se da una (o una suma de) integral(es) iterada(s) de la función $f(x,y)$ sobre la región R (o sobre subregiones de R respectivamente). Haga un dibujo que muestre la región de integración R y escriba la expresión de la integral iterada correspondiente si se intercambiara el orden de integración

1. $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\ dydx$
2. $\displaystyle\int_{-2}^2\int_0^{0.5\left(4-x^2\right)^{1/2}} f(x,y)\ dydx$
3. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\left(1-x^2\right)^{1/2}} f(x,y)\ dydx$
4. $\displaystyle\int_0^1\int_0^x f(x,y)\ dydx+\int_1^{10}\int_0^{(10-x)/9} f(x,y)\ dydx$
5. $\displaystyle\int_{-2}^0\int_0^{(x+2)^2} f(x,y)\ dydx+\int_0^2\int_0^{(x-2)^2} f(x,y)\ dydx$

7. Evalúe la integral iterada indicada

1. $\displaystyle\int_0^1\int_0^y x\ dxdy$
2. $\displaystyle\int_0^1\int_0^y y\ dxdy$
3. $\displaystyle\int_0^2\int_{\sqrt{x}}^3 \left(x^2+y\right)\ dydx$
4. $\displaystyle\int_0^1\int_{1-x}^{1+x} \left(2x-3y^2\right)\ dydx$
5. $\displaystyle\int_0^1\int_0^x \operatorname{sen}\left(x^2\right)\ dydx$
6. $\displaystyle\int_0^1\int_{x-1}^0 \frac{2y}{x+1}\ dydx$

8. Calcule la integral doble indicada

(a) $\displaystyle\int\int_R (x+3y)\,dA$, donde R es la región limitada por el eje x, la recta $y=2x$ y la recta $y=-x+4$.

(b) $\displaystyle\int\int_R x^2y^3\ dA$, donde R es la región limitada por el rectángulo de vértices en $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(3,2)$, $D(0,2)$.

(c) $\displaystyle\int\int_R \frac{1}{x+y}\ dA$, donde R es la región limitada por las rectas $y=0$, $x=1$ y $y=x$.

(d) $\displaystyle\int\int_R \operatorname{sen}(x+y)\,dA$, donde R es la región limitada por las rectas $x=0$, $y=x$ y $x=3\pi$.

(e) $\displaystyle\int\int_R \frac{x^2}{y}\ dA$, donde R es la región limitada por las parábolas $y=x^2$ y $x=y^2$.

(f) $\displaystyle\int\int_R \left(x^2+3y^3\right)^2\ dA$, donde R es la región limitada por las rectas $x=0$, $x=1$, $y=1$ y $y=0$.

(g) $\displaystyle\int\int_R (2x+y)^3\ dA$, donde R es la región limitada por el triángulo cuyos vértices son $A(1,1)$, $B(4,0)$ y $C(3,5)$.

(h) $\displaystyle\int\int_R e^xe^{2y}\ dA$, donde R es la región limitada por $|x|+|y|=1$.

(i) $\displaystyle\int\int_R x^2ye^{x-y}\ dA$, donde R es la región limitada por el rectángulo $[0,3]\times[0,2]$.

(j) $\displaystyle\int\int_R x^2y\operatorname{sen}(x+y)\,dA$, donde R es la región limitada por las rectas $x=0$, $x=y$ y $y=1$.

(k) $\displaystyle\int\int_R (x+y)\,dA$, donde R es la región limitada por el cuadrado $|x|+|y|=1$.

(l) $\displaystyle\int\int_R x\ dA$, donde R es la región limitada por el paralelogramo cuyos vértices son $A(0,0)$, $B(6,2)$, $C(10,5)$ y $D(4,3)$.

(m) $\displaystyle\int\int_R y\ dA$, donde R es la región limitada por el paralelogramo cuyos lados son $y=x-2$, $y=x+1$, $y=2-x$ y $y=-x$.

(n) $\displaystyle\int\int_R \arctan\left(\frac{y}{x}\right)dA$, donde R es la región en el primer cuadrante limitada por $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$ y las rectas $y=x$, $y=\sqrt{3}x$.

(o) $\displaystyle\int\int_D xy\ dxdy$, donde D es el triángulo de vértice $A(0,0)$, $B(2,1)$ y $C(4,3)$.

9. Evalúe la integral doble dada

(a) $\displaystyle\int\int_D xy\ dA$, donde $D=\left\{(x,y): 0\leq x\leq 1, x^2\leq y\leq\sqrt{x}\right\}$

(b) $\displaystyle\int\int_D (x-2y)\ dA$, donde $D=\{(x,y): 1\leq x\leq 3, 1+x\leq y\leq 2x\}$.

(c) $\displaystyle\int\int_D (3x+y)\ dA$, donde $D=\left\{(x,y): \frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{\pi}{4}, \operatorname{sen}x\leq y\leq\cos x\right\}$.

(d) $\displaystyle\int\int_D \left(x^2 - 2xy\right)\, dA$, donde $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 2 - x\}$.

(e) $\displaystyle\int\int_D \left(y - xy^2\right)\, dA$, donde $D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1, -y \leq x \leq 1 + y\}$.

(f) $\displaystyle\int\int_D x \operatorname{sen} y\, dA$, donde $D = \left\{(x,y) : 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq x \leq \cos y\right\}$.

(g) $\displaystyle\int\int_D e^{x/y}\, dA$, donde $D = \left\{(x,y) : 1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq y^3\right\}$.

(h) $\displaystyle\int\int_D \frac{1}{x}\, dA$, donde $D = \left\{(x,y) : 1 \leq y \leq e, y^2 \leq x \leq y^4\right\}$.

(i) $\displaystyle\int\int_R \left(x^2 + y^2\right) dA$, donde $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq 4\right\}$.

(j) $\displaystyle\int\int_R \exp\left(x^2 + y^2\right) dA$, donde $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq 9\right\}$.

(k) $\displaystyle\int\int_R \frac{1}{4 - x^2 - y^2}\, dA$, donde $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.

10. Use integrales dobles para calcular el área de la región D acotada por las curvas dadas

1. $y = x^2, \quad y = x^4$
2. $y = x^4, \quad y = -x - 1, \quad x = -2, \quad x = 0$
3. $y = x^4, \quad y = 4 - 3x^2$
4. $y = x^2, \quad y = x + 4$
5. $y^2 = x, \quad x = 5$
6. $y = \ln x, \quad y = -\ln x, \quad x = e$
7. $y = \ln x, \quad y = \ln^2 x$
8. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = \cos x, \quad x = \dfrac{\pi}{4}, \quad x = \dfrac{5\pi}{4}$
9. $y = x, \quad y = x^3$
10. $x + y^2 = 0, \quad x = y^2 + 1, \quad y = 0, \quad y = 3$
11. $y = x^2 - 4x, \quad y = 2x$
12. $x = 3y, \quad x + y = 0, \quad 7x + 3y = 24$
13. $y = x, \quad y = x^2$
14. $y^2 = x, \quad y = x + 5, \quad y = -1, \quad y = 2$
15. $y = x^2, \quad y^2 = x$
16. $y = x^2 + 3, \quad y = x, \quad x = -1, \quad x = 1$
17. $y = \sqrt{x}, \quad y = x/2$
18. $y = \cos x, \quad y = \operatorname{sen} 2x, \quad x = 0, \quad x = \pi/2$
19. $y = 4x^2, \quad y = x^2 + 3$
20. $y = x^2 + 2, \quad y = 2x + 5, \quad x = 0, \quad x = 6$
21. $y = x^4 - x^2, \quad y = 1 - x^2$
22. $y = 4 - x^2, \quad y = x + 2, \quad x = -3, \quad x = 0$
23. $x + y^2 = 2, \quad x + y = 0$
24. $y = x^2 + 2x + 2, \quad y = x + 4, \quad x = -3, \quad x = 2$
25. $y^2 = x, \quad x - 2y = 3$
26. $y = x^2 + 1, \quad y = 3 - x^2, \quad x = -2, \quad x = 2$
27. $x = 1 - y^2, \quad x = y^2 - 1$
28. $y = |x|, \quad y = (x+1)^2 - 7, \quad x = -4$
29. $y = 2x - x^2, \quad y = x^3$
30. $y = \cos x, \quad y = \operatorname{sen} x, \quad x = -\pi/4, \quad x = \pi/2$
31. $x = 1 - y^4, \quad x = y^3 - y$
32. $y = \cos x, \quad y = \sec^2 x, \quad x = -\pi/4, \quad x = \pi/4$
33. $y = x^3, \quad x = y^3$
34. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = \operatorname{sen} 2x, \quad x = 0, \quad x = \pi/2$
35. $y = x\sqrt{1 - x^2}, \quad y = x - x^3$
36. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = \cos 2x, \quad x = 0, \quad x = \pi/4$

37. $y = x^2 - 4x + 3, \quad y = 0$

38. $y = |x - 1|, \quad y = x^2 - 3, \quad x \geq 0$

39. $y = 4 + 3x - x^2, \quad y = 0$

40. $y = \cos x, \quad y = \operatorname{sen} 2x, \quad x = \pi/2, \quad x = \pi$

41. $y = \sqrt{x - 4}, \quad y = 0, \quad x = 8$

42. $x^2 + 2x + y = 0, \quad x + y + 2 = 0$

43. $x = y^4, \quad x = 2 - y^4$

44. $y = x^3 - 4x^2 + 3x, \quad y = x^2 - x$

45. $x = 6y - y^2, \quad x = 0$

46. $y = \sqrt{x - 1}, \quad x - 3y + 1 = 0$

11. Sea $I = \displaystyle\int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\, dy dx.$

   (a) Dibuje la región de integración.

   (b) Exprese I cambiando el orden de integración.

12. Construir el recinto cuya área se expresa por la siguiente integral

$$\int_{-1}^{2} \int_{x^2}^{x+2} dy dx$$

   y calcular dicha área cambiando el orden de integración.

13. Sea $T(u, v) = \left(u^2 - v^2, 2uv\right)$ y sea $D^* = \left\{(u, v) \ / \ u^2 + v^2 \leq 1, \ u \geq 0, \ u \geq v\right\}$.

   (a) Hallar $D = T(D^*)$.

   (b) Calcular $\displaystyle\int\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ usando el cambio de variables dado.

14. Considere la aplicación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(u, v) = \left(u + v, v - u^2\right)$$

   y sea D^* el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(0, 2)$ en el plano uv.

   (a) Hallar $D = T(D^*)$.

   (b) Demostrar que T es inyectiva en D^*.

   (c) Calcular el área de D, mediante una integral doble en las variables x, y y también mediante una integral doble de las variables u y v.

15. Cambiar el orden de integración en la siguiente integral

$$\int_{-1}^{2} \int_{(x-1)^2}^{5-x^2} f(x, y)\, dy dx.$$

16. Calcular $\displaystyle\int\int_D \frac{dxdy}{x + y}$, donde D es la región acotada por $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, $x + y = 4$, usando la función $T(u, v) = (u - uv, uv)$.

17. Calcular $\displaystyle\int\int_D \frac{y}{x^2}\, dxdy$, donde D es la región acotada por $x = 1$, $x = 2$, $y = x^2$, $y = 2x^2$, usando la función $T(u, v) = \left(v, v^2(1 + u)\right)$.

18. Construir el recinto cuya área se expresa por la siguiente integral

$$\int_{-1}^{2} \int_{y^2}^{y+2} dx \ dy$$

   y calcular dicha área cambiando el orden de integración.

19. Sea $T(u,v) = \left(u^2 - v^2, 2uv\right)$ y sea $D^* = \left\{(u,v) \ / \ u^2 + v^2 \leq 1, \ u \geq 0, \ u \geq v\right\}$.
    (a) Hallar $D = T(D^*)$.
    (b) Calcular $\displaystyle\int\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ usando el cambio de variable dado.

20. Al calcular, por doble integración, el volumen V limitado, por encima, por la superficie $z = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{1/2}$ y por debajo, por cierta región S del plano xy, se ha llegado a la siguiente integral

$$V = \int_1^2 \int_x^{x^3} \left(\frac{x}{y}\right)^{1/2} dydx + \int_2^8 \int_x^8 \left(\frac{x}{y}\right)^{1/2} dydx.$$

Dibujar la región S y calcular V invirtiendo el orden de integración.

21. Al calcular, por doble integración, el volumen V limitado, por encima, por la superficie $z = \left(\dfrac{y}{x}\right)^{1/2}$ y por debajo, por cierta región S del plano xy, se ha llegado a la siguiente integral

$$V = \int_1^2 \int_y^{y^3} \left(\frac{y}{x}\right)^{1/2} dxdy + \int_2^8 \int_y^8 \left(\frac{y}{x}\right)^{1/2} dxdy.$$

Dibujar la región S y calcular V invirtiendo el orden de integración.

22. Calcular la integral

$$\int\int_D \frac{xy}{1+x^2y^2}\, dxdy,$$

donde D es la región limitada por las gráficas de las ecuaciones $xy=1$, $xy=4$, $x=1$, $x=4$ (Sugerencia: Hacer $x=u$, $y=\dfrac{v}{u}$)

23. Calcular la integral

$$\int\int_D \frac{xy}{1+x^2y^2}\, dxdy,$$

donde D es la región limitada por las gráficas de las ecuaciones $xy=1$, $xy=2$, $x=1$, $x=2$ (Sugerencia: Hacer $x=u$, $y=\dfrac{v}{u}$)

24. Calcular la integral

$$\int\int_D \left(x^2+2y^2\right) dxdy,$$

donde D es la región limitada por las gráficas de las ecuaciones $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=2x$. Para ello use el teorema de cambio de variable con $x=\dfrac{u}{v}$, $y=v$.

25. (a) Dibujar la región de integración S y calcular la integral doble

$$I = \int\int_S (2+x+y)\, dx\ dy,$$

    donde S es la región del plano limitada por las curvas de ecuaciones $y=-x$, $x=\sqrt{y}$, $y=3$.
    (b) Invierte el orden de integración de la parte 25a.

26. Una integral doble está dada mediante integrales iteradas por

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{4-y^2} f(x,y)\, dx\ dy.$$

Represente la región de integración S e invierta el orden de integración.

27. Utilizando algún cambio de variables conveniente, calcule las integrales

(a) $\displaystyle\int\int_S \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$, donde S es el dominio del plano definido por las condiciones

$$x^2+y^2 \geq 9, \qquad\qquad x^2+y^2 \leq 16.$$

(b) $\displaystyle\int\int_S \cos\left(\frac{2x-2y}{3x+3y}\right) dx\, dy$, donde S es la región acotada por las curvas de ecuaciones

$$x+y=2, \qquad\qquad x=0, \qquad\qquad y=0.$$

(c) $\displaystyle\int\int_S x^2y^2\, dx\, dy$, donde S es la región del primer cuadrante acotada por las curvas de ecuaciones

$$xy=1, \qquad\qquad xy=2, \qquad\qquad y=x, \qquad\qquad y=4x.$$

(d) $\displaystyle\int\int_S x\, dx\, dy$, donde S es el dominio limitado por las curvas de ecuaciones

$$x^2+y^2=a^2, \qquad\quad x^2+y^2=b^2, \qquad\quad b>a>0.$$

(e) $\displaystyle\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \left(x^2+y^2\right) dy\, dx.$

(f) $\displaystyle\int\int_S (x+y)\cos^2(x-y)\, dx\, dy$, donde S es el paralelogramo de vértices los puntos $(0,0)$, (π,π), $(-\pi,3\pi)$, $(-2\pi,2\pi)$.

(g) $\displaystyle\int\int_S \left(x^2+y^2\right) dy\, dx$, donde S es la región limitada por las curvas de ecuaciones

$$y=0, \qquad\qquad y=x, \qquad\qquad \left(x^2+y^2\right)^{3/2}=x$$

28. Las integrales iteradas que se dan a continuación, son en cada caso las integrales dobles de ciertas funciones en regiones del plano xy

1. $\displaystyle\int_0^2 \int_0^y g(x,y)\, dx\, dy$ 2. $\displaystyle\int_0^{6a} dx \int_{\sqrt{6ax-x^2}}^{\sqrt{12ax}} f(x,y)\, dy, \quad a>0$ 3. $\displaystyle\int_{-1}^4 \int_{x^2-2x}^{x+4} g(x,y)\, dy\, dx$

4. $\displaystyle\int_{-1/2}^0 dx \int_{-x}^{x+1} g(x,y)\, dy$ 5. $\displaystyle\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} g(x,y)\, dx\, dy$ 6. $\displaystyle\int_0^{32/11} dy \int_{\frac{3}{2}y-3}^{5-\frac{5}{4}y} g(x,y)\, dx$

Para cada una de ellas, dibuje la región de integración y exprese la integral doble mediante integrales iteradas cambiando el orden de integración.

29. En cada uno de los siguientes casos, utilice algún cambio de variables conveniente a los fines de demostrar la igualdad que allí se establece

(a) $\displaystyle\int\int_S f(x,y)\, dx\, dy = \frac{3}{2}\ \ln 2 \int_2^4 f(u)\, du$, siendo S la región del primer cuadrante limitada por las curvas de ecuaciones

$$xy=2, \qquad\qquad xy=4, \qquad\qquad x=y, \qquad\qquad y=8x.$$

(b) $\displaystyle\int_0^a \int_0^{a-y} e^{-(x+y)} f(x)\, g(y)\, dx\ dy = \int_0^a \int_0^u e^{-u} f(u-v)\, g(v)\, dv\ du.$

30. Utilice una transformación conveniente para calcular la integral $\displaystyle\int\int_S \left(x^2+y^2\right) dx\ dy$, donde S es la región encerrada por las curvas de ecuaciones

$$x^2-y^2=1, \qquad x^2-y^2=4, \qquad xy=2, \qquad xy=6.$$

31. Calcule la altura h que debe tener el cilindro definido por $x^2+y^2\leq 4a^2$, con base en el plano xy, para que su volumen sea igual al del sólido definido por $z\leq a^2-x^2-y^2$, $z\leq 0$, $a>0$ es una constante.

32. Hallar el volumen del cuerpo en $\mathbb{R}^3$ limitado por las superficies indicadas.

   (a) $z=x^2+y^2$, $z=1$

   (b) $z=5-x-y$, $z=0$, $x=0$, $x=2$, $y=0$ y $y=3$.

   (c) $x+y+z=6$, $x^2+y^2=1$, $x=0$, $y=0$ y $z=0$.

   (d) $y=\ln x$, $y=\ln^2 x$, $x=1$, $x=e$, $z=0$ y $z=3$.

   (e) $z=xy$, $x+y=2$, y $z=0$.

   (f) $x^2+y^2=z$, $z=2-x^2-y^2$.

   (g) $z=3x^2+y^2+3$, $x+y=2$ y los planos coordenados.

   (h) $z=x^2$, $z=4-x^2-y^2$.

   (i) $x=\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}$, $x=h$, donde a, b, h son constantes positivas.

33. Si $f(x,y)=e^{\operatorname{sen}(x+y)}$ y $D=[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$, demostrar que

$$\frac{1}{e}\leq\frac{1}{4\pi^2}\int\int_D f(x,y)\,dA\leq e.$$

34. Demostrar que

$$\frac{1}{2}(1-\cos 1)\leq\int\int_{[0,1]\times[0,1]}\frac{\operatorname{sen} x}{1+(xy)^4}\ dx\ dy\leq 1.$$

35. Si $D=[-1,1]\times[-1,2]$, probar que

$$1\leq\int\int_D\frac{dx\ dy}{x^2+y^2+1}\leq 6.$$

36. Demostrar que

$$\frac{1}{6}\leq\int\int_D\frac{dA}{y-x+3}\leq\frac{1}{4},$$

donde D es el triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,1)$ y $(1,0)$.

37. Expresar mediante una integral el volumen del cono cuya base tiene radio r y cuya altura es h.

38. ¿Cuál es el volumen de un granero que tiene una base rectangular de 6 m $\times$ 12 m, paredes de 9 m de altura al frente (que está del lado que mide 6 m) y 12 m detrás? El granero tiene un techo plano. Usar integrales dobles para calcular dicho volumen.

1. **Marsden, Jerrold E., y Tromba, Anthony J.**: "*Cálculo vectorial*". Quinta edición. Addison-Wesley.
2. **Apostol, Tom**: "*Calculus*". Volumen II. Segunda Edición. Editorial Reverte
3. **Pita Ruiz, Claudio**: "*Cálculo vectorial*". Primera edición. Prentice Hall Hispanoamericana.
4. **Morales Bueno, Jacinto**: "*Problemario: Ejercicios de Cálculo Diferencial y del Cálculo Integral en Varias Variables Reales*". Tercera Edición. U.S.B.
5. **Bradley, Gerald L., y Smith, Karl J.**: "*Cálculo de varias variables*". Volumen 2. Prentice Hall.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Integrales triples

Objetivos a cubrir

Código : MAT-CV.8

- Integrales triples. Cambio de coordenadas.
- Calculo de volumen usando integrales triples.

Ejercicios

1. Calcular la integral triple indicada

   (a) $\displaystyle\iiint_\Omega xyz\ dV$, donde $\Omega = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

   (b) $\displaystyle\iiint_\Omega (x+y+z)\ dV$, donde $\Omega = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

   (c) $\displaystyle\iiint_\Omega (1-x-y-z)\ dV$, donde Ω es la región limitada por los planos coordenados y el plano $x+y+z=1$.

   (d) $\displaystyle\iiint_\Omega z\,(x-1)\,(y-2)\ dV$, donde Ω es la región del ejercicio 1c.

   (e) $\displaystyle\iiint_\Omega \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\ dV$, donde Ω es la parte de la región $|x|+|y|+|z|\leq 1$ que se encuentra en el primer octante.

   (f) $\displaystyle\iiint_\Omega e^{x+y+z}\ dV$, donde $\Omega = [-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]$.

   (g) $\displaystyle\iiint_\Omega (xe^y + ye^z)\,dV$, donde Ω es la región limitada por los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$, $y=1-x$ y $z=1$.

   (h) $\displaystyle\iiint_\Omega y\ dV$, donde $\Omega = [0,1]\times[0,2]\times[0,1]$.

   (i) $\displaystyle\iiint_\Omega \left(x^2+y^2\right) dV$, donde Ω es el sólido limitado por las superficies de ecuaciones $x^2+y^2=3z$, $z=3$.

   (j) $\displaystyle\iiint_\Omega 4y\ dV$, donde Ω es el sólido limitado por los planos coordenados y el plano $6x+6y+z=6$.

   (k) $\displaystyle\iiint_\Omega x\ dV$, donde Ω es el sólido limitado por $x\geq y^2$, $y\geq 0$, $z\geq 0$, $z+x\leq 1$.

   (l) $\displaystyle\iiint_\Omega (x+y+z)\,dV$, donde Ω es el sólido limitado por $-1\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq |x|$, $0\leq z\leq 1$.

   (m) $\displaystyle\iiint_\Omega \left(x^2+y^2\right) dV$, donde Ω es el sólido limitado por las inecuaciones $x^2+y^2\leq 2az$, $x^2+y^2+z^2\leq 3a^2$, donde a es una constante positiva.

2. Dibuje la región D en $\mathbb{R}^3$ acotada por la superficie $z=4-4x^2-y^2$ y el plano xy. Exprese el volumen de D como una integral triple.

Farith J. Briceño N.
farith.math@gmail.com

3. Calcule la integral iterada dada

1. $\int_0^1 \int_0^z \int_0^y xyz \, dxdydz$ 2. $\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^{x+y} 2xy \, dzdydx$ 3. $\int_0^{\pi} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} z \operatorname{sen} y \, dxdzdy$

4. $\int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{4-y^2} dxdzdy$ 5. $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-2z} dydzdx$ 6. $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^x yz \, dydzdx$

4. Hallar el volumen del cuerpo en $\mathbb{R}^3$ limitado por las superficies indicadas.

(a) $z = x^2 + y^2, \ z = 1$.

(b) $z = 5 - x - y, \ z = 0, \ x = 0, \ x = 2, \ y = 0$ y $y = 3$.

(c) $x + y + z = 6, \ x^2 + y^2 = 1, \ x = 0, \ y = 0$ y $z = 0$.

(d) $y = \ln x, \ y = \ln^2 x, \ x = 1, \ x = e, \ z = 0$ y $z = 3$.

(e) $z = xy, \ x + y = 2,$ y $z = 0$.

(f) $x^2 + y^2 = z, \ z = 2 - x^2 - y^2$.

(g) $z = 3x^2 + y^2 + 3, \ x + y = 2$ y los planos coordenados.

(h) $z = x^2, \ z = 4 - x^2 - y^2$.

(i) $x = \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2}, \ x = h,$ donde $a, \ b, \ h$ son constantes positivas.

5. Calcular la integral $\int\int\int_W \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dx \ dy \ dz,$ siendo

$$W = \left\{ (x, y, z) \ / \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 8, \ x \geq \sqrt{y^2 + z^2} \right\}.$$

6. Evaluar $\int\int\int_W y \, dV,$ donde,

(a) $W = \left\{ (x, y, z) \ / \ y \leq \sqrt{3x^2 + 3z^2}, \ y \geq \sqrt{x^2 + z^2}, \ 0 \leq y \leq 2 \right\}$.

(b) $W = \left\{ (x, y, z) \ / \ y \leq -\sqrt{x^2 + z^2}, \ y \geq -\sqrt{3x^2 + 3z^2}, \ -2 \leq y \leq 0 \right\}$.

7. Evaluar $\int\int\int_W \dfrac{dV}{\sqrt{y^2 + z^2}},$ donde

(a) $W = \left\{ (x, y, z) \ / \ 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \ 3x^2 \leq y^2 + z^2 \right\}$.

(b) $W = \left\{ (x, y, z) \ / \ 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \ x^2 \leq 3\left(y^2 + z^2\right) \right\}$.

8. Sea W la región de $\mathbb{R}^3$ limitada por las gráficas de $y^2 + z^2 = 9, \ x + z = 3, \ x = 0$.

(a) Dibuje W.

(b) Hallar los límites de integración en los siguientes órdenes (dibujar la proyección en el plano corres_ pondiente)

1. $\int\int\int_W f(x, y, z) \, dy \ dz \ dx$ 2. $\int\int\int_W f(x, y, z) \, dx \ dy \ dz$

3. $\int\int\int_W f(x, y, z) \, dz \ dy \ dx$

(c) Usar coordenadas cilíndricas para evaluar $\displaystyle\int\int\int_W \frac{dV}{\sqrt{y^2+z^2}}$.

9. Sea Ω la región de $\mathbb{R}^3$ limitada por el cilindro de ecuación $x^2+y^2=b^2$, el plano de ecuación $x+z=b$ y el plano $z=0$.

   (a) Dibuje Ω.

   (b) Dibuje la proyección de Ω sobre el plano xz y descríbala por medio de desigualdades.

   (c) Complete los límites de integración para que

$$\int\int\int_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \int\ dx \int\ dz \int f(x,y,z)\,dy.$$

   (d) Dibuje la proyección de Ω sobre el plano yz y descríbala por medio de desigualdades.

   (e) Calcule $\displaystyle\int\int\int_\Omega dxdydz$ mediante integrales iteradas del tipo $\displaystyle\int dx\int dy\int dz$, en ese orden.

10. Sea Ω la región de $\mathbb{R}^3$ limitada por el cilindro de ecuación $x^2+y^2=a^2$, el plano de ecuación $y+z=a$ y el plano $z=0$.

   (a) Dibuje Ω.

   (b) Dibuje la proyección de Ω sobre el plano yz y descríbala por medio de desigualdades.

   (c) Complete los límites de integración para que

$$\int\int\int_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \int\ dy \int\ dz \int f(x,y,z)\,dx$$

   en ese orden.

   (d) Dibuje la proyección de Ω sobre el plano xz y descríbala por medio de desigualdades.

   (e) Calcule $\displaystyle\int\int\int_\Omega dxdydz$ mediante integrales iteradas del tipo $\displaystyle\int dx\int dy\int dz$, en ese orden.

11. Sea W la región de $\mathbb{R}^3$ limitada por las gráficas de $x^2+y^2=a^2$, y por los planos $y+z=a$, $z=0$.

   (a) Dibuje W.

   (b) Hallar los límites de integración en los siguientes órdenes (dibujando la proyección en el plano corres_ pondiente)

   1. $\displaystyle\int\int\int_W f(x,y,z)\,dz\ dx\ dy$
   2. $\displaystyle\int\int\int_W f(x,y,z)\,dx\ dz\ dy$
   3. $\displaystyle\int\int\int_W f(x,y,z)\,dy\ dx\ dz$.

   (c) Usar coordenadas cilíndricas para evaluar $\displaystyle\int\int\int_W x^2\ dV$.

12. Sea W la región de $\mathbb{R}^3$ limitada por las gráficas de $x^2+z^2=9$, $z-y=3$, $y=0$.

   (a) Dibuje W.

   (b) Hallar los límites de integración en los siguientes órdenes (dibujando la proyección en el plano corres_ pondiente)

   1. $\displaystyle\int\int\int_W f(x,y,z)\,dy\ dz\ dx$
   2. $\displaystyle\int\int\int_W f(x,y,z)\,dx\ dy\ dz$
   3. $\displaystyle\int\int\int_W f(x,y,z)\,dz\ dy\ dx$.

(c) Usar coordenadas cilíndricas para evaluar $\displaystyle\iiint_W z^2\ dV$.

13. Sea W la región de $\mathbb{R}^3$ limitada por las gráficas de $x^2+z^2=4,\ \ z-y=-2,\ \ y=0$.

 (a) Dibuje W.

 (b) Hallar los límites de integración en los siguientes órdenes (dibujando la proyección en el plano corres_ pondiente)

 1. $\displaystyle\iiint_W f(x,y,z)\,dy\ dz\ dx$ 2. $\displaystyle\iiint_W f(x,y,z)\,dx\ dy\ dz$

 3. $\displaystyle\iiint_W f(x,y,z)\,dz\ dy\ dx$.

 (c) Usar coordenadas cilíndricas para evaluar $\displaystyle\iiint_W x^2\ dV$.

14. Sea W la región de $\mathbb{R}^3$ limitada por las gráficas de $x^2+y^2=4,\ \ z-y=2,\ \ z=0$.

 (a) Dibuje W.

 (b) Hallar los límites de integración en los siguientes órdenes (dibujando la proyección en el plano corres_ pondiente)

 1. $\displaystyle\iiint_W f(x,y,z)\,dy\ dz\ dx$ 2. $\displaystyle\iiint_W f(x,y,z)\,dx\ dy\ dz$

 3. $\displaystyle\iiint_W f(x,y,z)\,dz\ dy\ dx$.

 (c) Usar coordenadas cilíndricas para evaluar $\displaystyle\iiint_W \frac{dV}{\sqrt{y^2+x^2}}$.

15. Al sólido definido mediante $x^2+y^2+z^2\leq 9$ se le quita el "interior"de la superficie de ecuación $z^2=x^2+y^2$. Denote por Ω el sólido resultante. Calcule la masa de Ω si la densidad es $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

16. Sea $\Omega=\left\{(x,y,z)\ /\ x^2+y^2+z^2\leq 9,\ z\leq\sqrt{x^2+y^2},\ z\geq-\sqrt{3x^2+3y^2}\right\}$. Calcular la masa de Ω si se sabe que la densidad en un punto $P(x,y,z)$ es directamente proporcional a la distancia de P al plano xy.

17. Sea $\Omega=\left\{(x,y,z)\ /\ x^2+y^2+z^2\leq 9,\ z\leq\sqrt{3x^2+3y^2},\ z\geq-\sqrt{x^2+y^2}\right\}$. Calcular la masa de Ω, si se sabe que la densidad en un punto $P(x,y,z)$ es directamente proporcional a la distancia de P al plano xy.

18. Hallar el centro de masa del sólido

$$S=\left\{(x,y,z)\ /\ x^2+y^2+z^2\leq 4,\ x^2+y^2\leq 3z\right\},$$

 si la densidad de masa es constante igual a 2 y el volumen es $\dfrac{19}{6}\pi$.

19. Calcular $\displaystyle\iiint_V e^z\ dx\ dy\ dz$, donde

$$V=\left\{(x,y,z)\ /\ 1\leq x^2+y^2+z^2\leq 4,\ z\leq-\sqrt{x^2+y^2}\right\}.$$

20. Expresar mediante una integral el volumen del cono cuya base tiene radio r y cuya altura es h.

21. Evaluar $\displaystyle\iiint_W z\ dV$, donde

$$W=\left\{(x,y,z)\ /\ z\leq 0,\ x^2+y^2-z^2\leq 0,\ 3x^2+3y^2-z^2\geq 0,\ 2z^2-x^2-y^2\leq 1\right\}.$$

22. ¿Cuál es el volumen de un granero que tiene una base rectangular de $6 \text{ m} \times 12 \text{ m}$, paredes de 9 m de altura al frente (que está del lado que mide 6 m) y 12 m detrás? El granero tiene un techo plano. Usar integrales triples para calcular dicho volumen.

23. Calcule la altura h que debe tener el cilindro definido por $x^2 + y^2 \leq 4a^2$, con base en el plano xy, para que su volumen sea igual al del sólido definido por $z \leq a^2 - x^2 - y^2$, $z \leq 0$, $a > 0$ es una constante.

24. En cada una de las siguientes integrales, se tiene la integral triple $\int\int\int_W f(x,y,z)\,dV$ de alguna función continua f expresada mediante integrales iteradas. En cada caso

    (a) Determine el dominio de integración W y su proyección sobre el plano xy.

    (b) Exprese la integral mediante integrales iteradas, integrando primero respecto a la variable y.

    1. $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} f(x,y,z)\,dz\;dy\;dx$ 2. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\int_{0}^{x^2+y^2} f(x,y,a)\,dz\;dy\;dx$

    3. $\displaystyle\int_{0}^{a}\int_{0}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}}\int_{0}^{c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}} f(x,y,z)\,dz\;dy\;dx$

    4. $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{3}}\int_{0}^{\sqrt{3-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{3} f(x,y,z)\,dz\;dy\;dx$ 5. $\displaystyle\int_{0}^{a}\int_{0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\int_{0}^{(a-x)/2} f(x,y,z)\,dz\;dy\;dx$

25. Calcule las siguientes integrales, haciendo un cambio de variable apropiado

    (a) $I = \displaystyle\int\int\int_W \sqrt{x^2+y^2}\,dV$, donde W es el sólido acotado por la hoja superior de la superficie cónica de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ y por el plano de ecuación $z = 4$.

    (b) $I = \displaystyle\int\int\int_W \frac{dV}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, donde W es el sólido acotado por las superficies de ecuaciones $z^2 = x^2 + y^2$ $z = 1$, siendo $z \geq 0$.

    (c) $\displaystyle\int\int\int_W \left(x^2+y^2\right) dV$, donde W es el sólido acotado por un cilindro circular recto de eje $0z$, de altura h, base en el plano xy, siendo R el radio de la misma.

    (d) $\displaystyle\int\int\int_W \left(x^2+y^2\right) dV$, donde W es el sólido acotado por el cono de altura h que tiene por ecuación $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

    (e) $\displaystyle\int\int\int_W (x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)\,dV$, donde W es el sólido acotado por los planos de ecuaciones $x+y+z=0$, $x+y-z=0$, $x-y+z=0$, $3x+z=1$.

26. Calcular el volumen de la intersección de dos cilindros circulares de mismo radio R, cuyos ejes se cortan ortogonalmente.

27. Determine el volumen del sólido limitado por la superficie cerrada de ecuación $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 = az\left(x^2+y^2\right)$, donde a es una constante positiva.

28. Calcular el volumen de la región limitada por las superficies cilíndricas $xy = 1$, $xy = 9$, $xz = 4$, $xz = 36$, $yz = 25$, $yz = 49$.

29. Una integral triple en coordenadas cilíndricas viene dada por

$$\int_{0}^{\pi/2}\int_{1}^{\sqrt{3}}\int_{1}^{\sqrt{4-r^2}} r^3 \operatorname{sen}\theta\cos\theta z^2\;dz\;dr\;d\theta$$

(a) Describa la región de integración mediante las ecuaciones en coordenadas cartesianas, de todas las superficies que la limitan. Haga un gráfico.

(b) Exprese la integral triple en coordenadas cartesianas, integrando primero con respecto a z, luego con respecto a y, y por último con respecto a x.

30. Determine el centro de gravedad de un cubo sólido de arista a, sabiendo que la densidad de masa en cada punto del mismo es proporcional al cuadrado de la distancia de dicho punto a un vértice de la base.

31. La densidad de masa dentro de una esfera de radio R es proporcional a la profundidad debajo de su superficie. Determinar

    (a) El centro de gravedad de un hemisferio sólido.

    (b) El radio de giro de toda la esfera sólida alrededor de uno de sus diámetros.

32. Un sólido tiene la forma de un cono circular de altura h. Determine el centro de gravedad, sabiendo que la densidad de masa en cada punto es proporcional a la distancia de ese punto a la base.

33. Calcular el momento de inercia de una esfera sólida homogénea de radio a, en relación a un diámetro de la misma. Escriba el momento de inercia en función de la masa total M de la esfera.

34. Un cono circular recto homogéneo tiene altura h. Demuestre que la distancia de su centroide a la base es $\dfrac{h}{2}$.

35. Con una mecha cónica de radio a y altura $2a$, se perfora a un sólido cilíndrico de radio a en forma perpendicular al eje del cilindro, hasta que la punta de la mecha llegue al eje del cilindro. Grafique y exprese el volumen del material perforado.

Bibliografía

1. **Marsden, Jerrold E., y Tromba, Anthony J.**: "*Cálculo vectorial*". Quinta edición. Addison-Wesley.

2. **Apostol, Tom**: "*Calculus*". Volumen II. Segunda Edición. Editorial Reverte

3. **Pita Ruiz, Claudio**: "*Cálculo vectorial*". Primera edición. Prentice Hall Hispanoamericana.

4. **Morales Bueno, Jacinto**: "*Problemario: Ejercicios de Cálculo Diferencial y del Cálculo Integral en Varias Variables Reales*". Tercera Edición. U.S.B.

5. **Bradley, Gerald L., y Smith, Karl J.**: "*Cálculo de varias variables*". Volumen 2. Prentice Hall.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Teorema de Green

Objetivos a cubrir

Código : MAT-CV.9

- Integral de linea. Teorema de Green.

Ejercicios

1. Usar el Teorema de Green para calcular la integral $\oint_C y^2\ dx + x\ dy$ cuando

   (a) C es el cuadrado de vértices $(0,0)$, $(2,0)$; $(2,2)$ y $(0,2)$.

   (b) C es el cuadrado de vértices $(\pm 1, \pm 1)$.

   (c) C es el cuadrado de vértices $(\pm 2, 0)$, $(0, \pm 2)$.

   (d) C es la circunferencia de radio 2 y centro en el origen.

   (e) C tiene la ecuación vectorial $\boldsymbol{\alpha}(t) = 2\cos^3 t\ \boldsymbol{i} + 2\,\mathrm{sen}^3\, t\ \boldsymbol{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

2. Si $P(x,y) = xe^{-y^2}$ y $Q(x,y) = -x^2 y e^{-y^2} + \dfrac{1}{x^2+y^2}$. Calcular la integral $\oint P\ dx + Q\ dy$ siguiendo el contorno del cuadrado de lado $2a$ determinado por las desigualdades $|x| \leq a$ y $|y| \leq a$.

3. Sea C una curva cerrada simple del plano xy y representemos con I, el momento de inercía (alrededor del eje z) de la región interior a C. Demostrar que existe un entero n, tal que
$$nI = \oint x^3\ dy - y^3\ dx.$$

4. Dado dos campos escalares, u y v, derivables con continuidad en un conjunto abierto que contiene el disco R cuya frontera es la circunferencia $x^2+y^2=1$. Definimos dos campos vectoriales $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{G}$ como sigue
$$\boldsymbol{F}(x,y) = v(x,y)\,\boldsymbol{i} + u(x,y)\,\boldsymbol{j}, \qquad \boldsymbol{G}(x,y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\boldsymbol{j}.$$
   Encontrar el valor de la integral doble $\displaystyle\int\int_R \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}\ dxdy$ si se sabe que sobre la frontera de R se tiene $u(x,y) = 1$ y $v(x,y) = y$.

5. Evaluar $\displaystyle\int_C y\ dx - x\ dy$, donde C es la frontera del cuadrado $[-1,1]\times[-1,1]$, orientada en dirección contraria a la de las manecillas del reloj.

6. Hallar el área del disco de radio R usando el Teorema de Green.

7. Verificar el Teorema de Green para el disco D con centro en $(0,0)$ y radio R y las funciones

   1. $P(x,y) = xy^2$, $\quad Q(x,y) = -yx^2$
   2. $P(x,y) = x+y$, $\quad Q(x,y) = y$
   3. $P(x,y) = xy$, $\quad Q(x,y) = xy$
   4. $P(x,y) = 2y$, $\quad Q(x,y) = x$

8. Usando el Teorema de la divergencia, demostrar que $\displaystyle\int_{\partial D} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\ ds = 0$, donde $\boldsymbol{F}(x,y) = y\ \boldsymbol{i} - x\ \boldsymbol{j}$ y D es el disco unitario. Verificar esto directamente.

9. Hallar el área acotada por un arco de la cicloide
$$x = a(\theta - \mathrm{sen}\,\theta)\,; \qquad y = a(1-\cos\theta)\,; \qquad a > 0 \quad \text{y} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$
   y el eje x. Usar el Teorema de Green.

Farith J. Briceño N. farith.math@gmail.com

10. Considerando las condiciones del Teorema de Green, demostrar que

(a) $\displaystyle\int_{\partial D} PQ\ dx + PQ\ dy = \int\int_D \left[Q\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) + P\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right]\ dxdy.$

(b) $\displaystyle\int_{\partial D} \left(Q\ \frac{\partial P}{\partial x} - P\ \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx + \left(P\ \frac{\partial Q}{\partial y} - Q\ \frac{\partial P}{\partial y}\right) dy = 2\int\int_D \left(P\ \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - Q\ \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}\right) dxdy.$

11. Evaluar $\displaystyle\int_C \left(2x^3 - y^3\right) dx + \left(x^3 + y^3\right) dy$, donde C es el círculo unitario y verificar el Teorema de Green para este caso.

12. Demostrar la siguiente generalización del Teorema de Green: Sea D una región en el plano xy cuya frontera consta de un número finito de curvas cerradas simples orientadas. Supóngase que por medio de un número finito de segmentos de rectas paralelos a los ejes coordenados, D se puede descomponer en un número finito de regiones D_i del tipo 3 con la frontera de cada D_i orientada en sentido contrario al de las manecillas del reloj (ver figura). Entonces, si P y Q son de clase C^1 en D.

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial D} P\ dx + Q\ dy,$$

donde ∂D es la frontera orientada de D. (Sugerencia: Aplicar el teorema de Green a cada D_i)

13. Verificar el teorema de Green para el integrando del ejercicio 11 y la región anular D descrita por $a \leq x^2 + y^2 \leq b$, con frontera orientadas como en la figura anterior.

14. Sea D una región para el cual se cumple el teorema de Green. Supóngase que f es armónica, es decir, f cumple con la ecuación
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$
en D. Demostrar que
$$\int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial y}\ dx - \frac{\partial f}{\partial x}\ dy = 0$$

15. (a) Verificar el teorema de la divergencia para $\boldsymbol{F}(x,y) = x\ \boldsymbol{i} + y\ \boldsymbol{j}$ y D el disco unitario $x^2 + y^2 \leq 1$.

(b) Evaluar la integral de la componente normal de $2xy\ \boldsymbol{i} - y^2 \boldsymbol{j}$ alrededor de la elipse definida por $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

16. Sean $P(x,y) = -y\left(x^2 + y^2\right)$ y $Q(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$. Suponiendo que D es el disco unitario. Investigar por qué el teorema de Green falla para esta P y Q.

17. Usar el teorema de Green para evaluar $\displaystyle\int_{C^+} \left(y^2 + x^3\right) dx + x^4\ dy$, donde C^+ es el perímetro del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ en dirección contraria a la de las manecillas del reloj.

18. Calcular el área dentro de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ usando el teorema de Green.

19. Usar el teorema de Green para recuperar la fórmula $A = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^b r^2\ d\theta$ para una región en coordenadas polares.

20. Demostrar la identidad
$$\int_{\partial D} \phi \nabla \phi \cdot \boldsymbol{n}\ ds = \int\int_D \left(\phi \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla \phi\right) dA.$$

21. Usar el teorema de Green para hallar el área de un lazo de la rosa de cuatro hojas $r = 3 \operatorname{sen} 3\theta$. (Sugerencia: $x\ dy - y\ dx = r^2\ d\theta$)

22. Verifique el teorema de Green con el campo $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ y el camino $\boldsymbol{\lambda}:[a,b]\to\mathbb{R}^2$

(a) $\boldsymbol{F}(x,y)=(3x+3y,x-y)$, $\boldsymbol{\lambda}:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\lambda}(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t)$.

(b) $\boldsymbol{F}(x,y)=\left(x^2y,y^2x\right)$, $\boldsymbol{\lambda}:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\lambda}(t)=(2\cos t,3\operatorname{sen} t)$.

(c) $\boldsymbol{F}(x,y)=(x,y)$, $\boldsymbol{\lambda}:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\lambda}(t)=\left(\operatorname{sen}^3 t,\cos^3 t\right)$.

(d) $\boldsymbol{F}(x,y)=\left(2xy,3x^2\right)$, con $\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda_1}+\boldsymbol{\lambda_2}$, definidos $\boldsymbol{\lambda_1},\boldsymbol{\lambda_2}:[0,1]\to\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\lambda_1}(t)=\left(t,t^2\right)$ y $\boldsymbol{\lambda_2}(t)=\left((1-t)^2,1-t\right)$.

(e) $\boldsymbol{F}(x,y)=(y,x)$, $\boldsymbol{\lambda}$ es un camino cerrado simple.

23. Con el teorema de Green calcule la integral de linea del campo $\boldsymbol{F}(x,y)=\left(5x^3+4y,2x-4y^4\right)$ a lo largo del círculo $(x-2)^2+y^2=4$, recorrido en sentido antihorario.

24. Aplique el teorema de Green para calculae la integral de linea del campo $\boldsymbol{F}(x,y)=\left(10x^4-y^3,x^3-3y^5\right)$ a lo largo del círculo $x^2+y^2=5$, recorrido en sentido antihorario.

25. Con el teorema de Green calcule la integral de linea del campo $\boldsymbol{F}(x,y)=(,\varphi(x)-y,x-\psi(y))$, donde φ y ψ son dos funciones reales de clase C^1 definidas en $\mathbb{R}$, a lo largo de un cuadrado de lado a recorrido positivamente.

26. Verifique el teorema de Green con el campo $\boldsymbol{F}(x,y)=(x+y,2x-y)$ y el camino cuya imagen es la frontera positivamente orientada de la región comprendida entre el círculo $x^2+y^2=9$, y el cuadrado $|x|+|y|=1$.

27. Verifique el teorema de Green con el campo $\boldsymbol{F}(x,y)=(3y,1)$ y el camino cuya imagen es la frontera positivamente orientada de la región interior al círculo $x^2+y^2=25$, y exterior a los cuatro círculos de radio 1 y centros en $(2,0)$, $(-2,0)$, $(0,2)$ y $(0,-2)$.

28. Sea $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ el campo $\boldsymbol{F}(x,y)=\left(2xy^2+y,2x^2y+x+\dfrac{x^2}{2}\right)$. Demuestre que si $\boldsymbol{\lambda}$ es cualquier camino cerrado simple, cuya imagen es una curva simétrica respecto del eje de ordenadas, entonces la integral de linea de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de $\boldsymbol{\lambda}$ es igual a cero.

29. Considere las integrales

$$I_1=\int_{\boldsymbol{\lambda}}(2x+y)^2\,dx-(x-2y)^2\,dy,\qquad\qquad I_2=\int_{\boldsymbol{\mu}}(2x+y)^2\,dx-(x-2y)^2\,dy,$$

donde $\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}:[0,1]\to\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\lambda}(t)=\left(t,t^2\right)$, $\boldsymbol{\mu}(t)=\left(t^2,t\right)$. Utilice el teorema de Green para calcular la diferencia I_1-I_2.

30. Aplique el teorema de Green para calcular el área de la figura limitada por la curva dada

(a) la elipse $\boldsymbol{\lambda}:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\lambda}(t)=(a\cos t,b\operatorname{sen} t)$.

(b) la lemniscata de Bernoulli $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)^2$ (Una parametrización de la parte de la lemniscata que se encuentra en el primer cuadrante es $\boldsymbol{\lambda}:[0,\pi/4]\to\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\lambda}(t)=\left(a\cos^{3/2}t.a\operatorname{sen} t\sqrt{\cos t}\right)$, la cual se obtiene de la expresión dada haciendo $y=x\tan t$).

(c) la astroide $\boldsymbol{\lambda}:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\lambda}(t)=\left(a\cos^3 t,a\operatorname{sen}^3 t\right)$.

31. Verifique el teorema de la divergencia con el campo $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ y el camino $\boldsymbol{\lambda}:[a,b]\to\mathbb{R}^2$

(a) $\boldsymbol{F}(x,y)=(3x+y,2y)$, $\boldsymbol{\lambda}:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\lambda}(t)=(3\cos t,3\operatorname{sen} t)$.

(b) $\boldsymbol{F}(x,y)=(5x-y,x+4y)$, $\boldsymbol{\lambda}:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\lambda}(t)=(2\cos t,3\operatorname{sen} t)$.

(c) $\boldsymbol{F}(x,y)=\left(x^2,y^2\right)$, $\boldsymbol{\lambda}$ es un camino cuya imagen es el cuadrado $|x|+|y|=1$ recorrido positivamente.

(d) $\boldsymbol{F}(x,y)=\left(2x^2y,xy^3+y\right)$, $\boldsymbol{\lambda}$ es un camino cuya imagen es la frontera del triángulo

$$R=\{(x,y)\,/\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 3x\}$$

recorrido positivamente.

32. Aplique el teorema de la divergencia para calcular el flujo del campo $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ a través de la frontera de la región R indicada

(a) $\boldsymbol{F}(x,y)=(2,0),\ \ R=[0,3]\times[0,2]$-

(b) $\boldsymbol{F}(x,y)=(x,y),\ \ R=\left\{(x,y)/0\leq x\leq 2,\ 0\leq y\leq x^2\right\}$-

(c) $\boldsymbol{F}(x,y)=\left(x^3y,xy^3\right),\ \ R=\left\{(x,y)/x^2+y^2\leq 4\right\}$-

(d) $\boldsymbol{F}(x,y)=\left(3x-y^2,x+x^2y\right),\ \ R=\{(x,y)/0\leq x\leq 2,\ 0\leq y\leq x\}$-

(e) $\boldsymbol{F}(x,y)=\left(3x-y^2,5x^3+2y\right),\ \ R=\left\{(x,y)/3x^2+y^2\leq 4\right\}$-

(f) $\boldsymbol{F}(x,y)=\left(x^3+y^3,2x^3+y^3\right),\ \ R=\left\{(x,y)/1\leq x^2+y^2\leq 4\right\}$-

Bibliografía

1. **Marsden, Jerrold E., y Tromba, Anthony J.**: "*Cálculo vectorial*". Quinta edición. Addison-Wesley.
2. **Apostol, Tom**: "*Calculus*". Volumen II. Segunda Edición. Editorial Reverte
3. **Pita Ruiz, Claudio**: "*Cálculo vectorial*". Primera edición. Prentice Hall Hispanoamericana.
4. **Morales Bueno, Jacinto**: "*Problemario: Ejercicios de Cálculo Diferencial y del Cálculo Integral en Varias Variables Reales*". Tercera Edición. U.S.B.
5. **Bradley, Gerald L., y Smith, Karl J.**: "*Cálculo de varias variables*". Volumen 2. Prentice Hall.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.